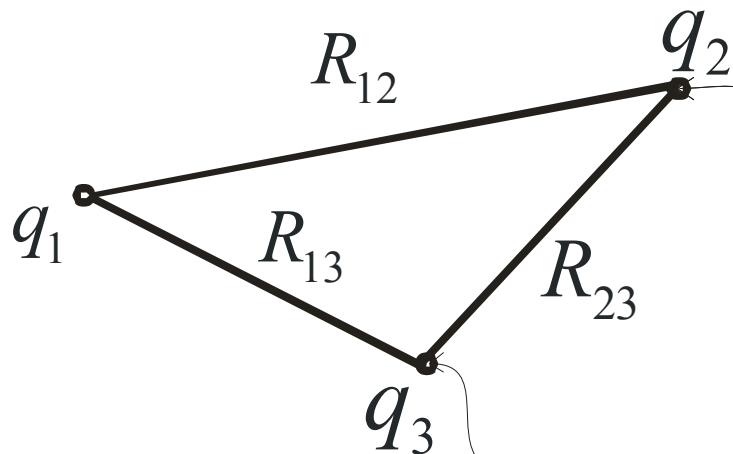


Лекция 6.

- Энергия системы электрических зарядов. Энергия взаимодействия и собственная энергия. Энергия электростатического поля и её объемная плотность. Энергия электрического диполя во внешнем поле.
- Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов.

Энергия системы электрических зарядов.



$$W_2 = q_2 \varphi_2 = k \frac{q_2 q_1}{R_{12}},$$

$$W_3 = q_3 \varphi_3 = k \frac{q_3 q_1}{R_{13}} + k \frac{q_3 q_2}{R_{23}},$$

$$W = W_2 + W_3 = k \left(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}} \right),$$

$$W = k \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \text{ где } \varphi_i = k \sum_j \frac{q_j}{R_{ij}},$$

Энергия взаимодействия зарядов при наличии диэлектриков

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad \text{но} \quad \varphi_i \neq k \sum_j \frac{q_j}{R_{ij}}.$$

Энергия взаимодействия зарядов при непрерывном распределении зарядов

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV.$$

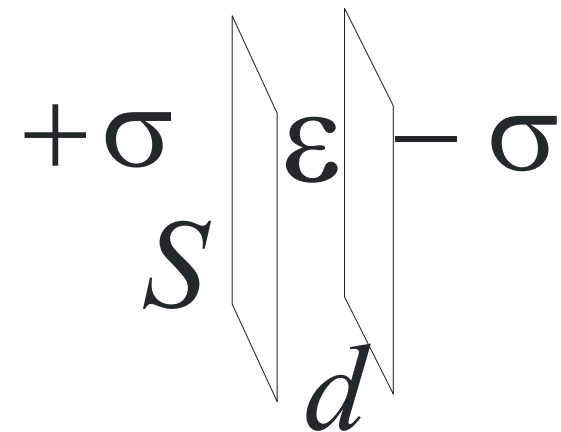
Пример. Энергия конденсатора.

$$W = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} q_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} q_1 U = \frac{cU^2}{2}.$$

Энергия системы заряженных проводников

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} q_i q_j.$$

Энергия электростатического поля и её
объемная плотность.



$$W = \frac{1}{2} c U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} (Ed)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_0 \epsilon E \cdot E}_D \cdot \underbrace{S d}_V = \frac{DE}{2} V.$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}.$$

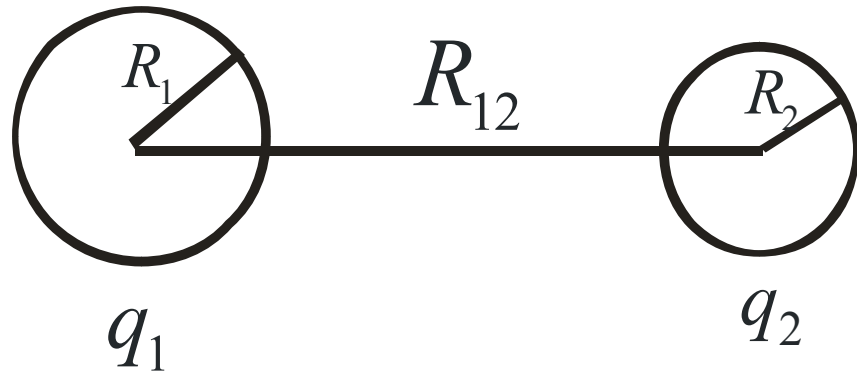
Строгий вывод формулы для плотности
энергии электростатического поля

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} (\operatorname{div} \vec{D}) \varphi dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\infty} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \right) \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (D_i \varphi)}{\partial x_i}}_{\operatorname{div}(\varphi \vec{D})} - \underbrace{\sum_{i=1}^3 D_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}_{-\vec{D} \vec{E}} \right) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_{S_{R \rightarrow \infty}} \varphi \vec{D} d\vec{S}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{D} \vec{E} dV = \int_{\infty} w dV, \quad \text{где } w = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}.
 \end{aligned}$$

Энергия взаимодействия и собственная энергия.

- Собственная энергия заряженного тела - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов данного тела друг с другом.
- Энергия взаимодействия двух заряженных тел - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов одного тела с зарядами другого тела.

Рассмотрим для простоты два заряженных проводящих шара



Для уединенных шаров

$$W_1^{\text{собст.}} = \frac{q_1 \varphi_1}{2}, \quad W_2^{\text{собст.}} = \frac{q_2 \varphi_2}{2}.$$

Для взаимодействующих шаров

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1^{q_1} + \varphi_1^{q_2}, \quad \varphi_2 = \varphi_2^{q_1} + \varphi_2^{q_2}. \quad W = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2 = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} q_1 \varphi_1^{q_1}}_{W_1^{\text{собст.}}} + \underbrace{\frac{1}{2} q_2 \varphi_2^{q_2}}_{W_2^{\text{собст.}}} + \underbrace{\frac{1}{2} q_1 \varphi_1^{q_2} + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2^{q_1}}_{W_{\text{взаимодействия}}}. \end{aligned}$$

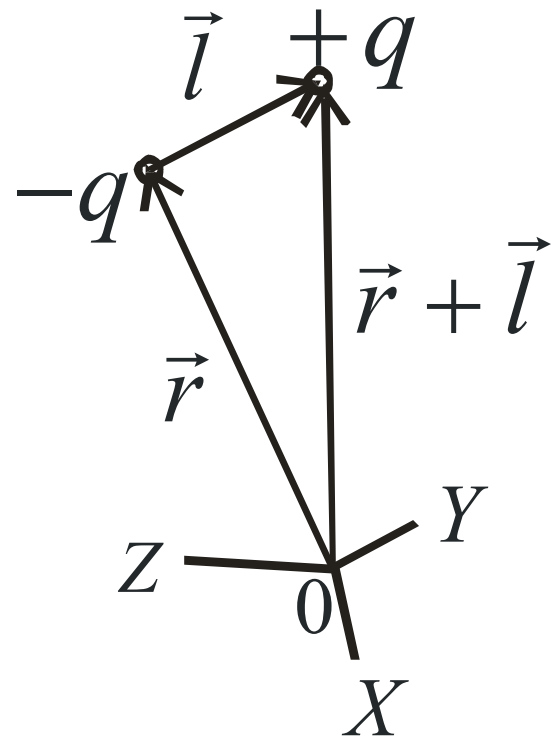
В рамках полевого формализма

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 ,$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2} dV = \\ &= \underbrace{\int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_1^2}{2} dV}_{W_1^{\text{собст.}}} + \underbrace{\int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_2^2}{2} dV}_{W_2^{\text{собст.}}} + \underbrace{\int_{\infty} \varepsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV}_{U^{\text{взаимод.}}} . \end{aligned}$$

При $R_{1,2} \rightarrow 0$, $W_{1,2}^{\text{собст.}} \rightarrow \infty$; $U^{\text{взаимод.}} \leq$ или > 0 .

Энергия электрического диполя во внешнем поле.



$$W = q\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - q\varphi(\vec{r}),$$

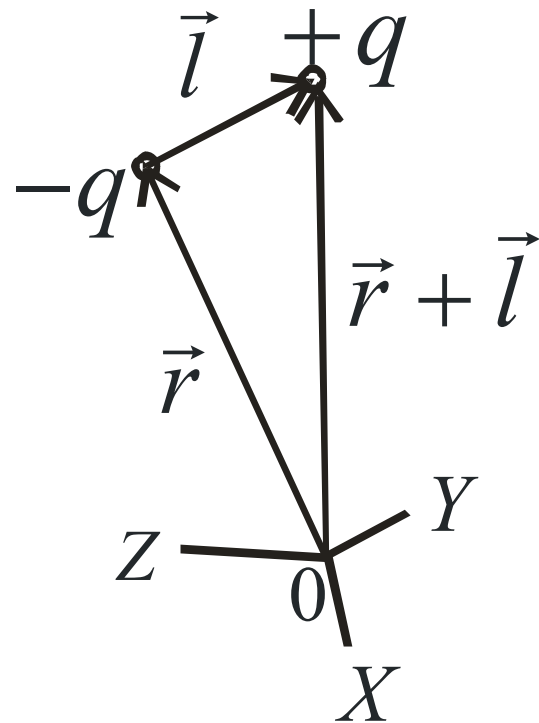
$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r} + \vec{l}) &= \varphi(x + l_x, y + l_y, z + l_z) = \\ &= \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + \dots, \end{aligned}$$

$$W = \underbrace{q\vec{l}}_{\vec{p}} \cdot \underbrace{\nabla \varphi}_{-\vec{E}} = -\vec{p}\vec{E}.$$

Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Силы, действующие на диполь.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\nabla W; & F_i &= -\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{p} \vec{E} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 p_j E_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 p_j \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right); \Rightarrow \vec{F} = (\vec{p} \nabla) \cdot \vec{E};\end{aligned}$$

Момент силы, действующей на диполь



$$\vec{M} = [\vec{r} + \vec{l}, q\vec{E}(\vec{r} + \vec{l})] - [\vec{r}, q\vec{E}(\vec{r})],$$

В однородном поле $\vec{E} = \text{const}$, тогда

$$\vec{M} = [\vec{l}, q\vec{E}] = [q\vec{l}, \vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}].$$

Объемная плотность силы, действующая на диэлектрик

Дипольный момент объема диэлектрика

$\vec{p}_{\Delta V}$ выражается через вектор поляризации $\vec{P}$

$\vec{p}_{\Delta V} = \vec{P}\Delta V$, тогда плотность силы

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}_{\Delta V}}{\Delta V} = \frac{(\vec{p}_{\Delta V} \cdot \nabla) \vec{E}}{\Delta V} = \left(\underbrace{\vec{P}}_{\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}} \cdot \nabla \right) \vec{E} = \varepsilon_0 \alpha (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E};$$

$$f_i = \varepsilon_0 \alpha \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varepsilon_0 \alpha \sum_{j=1}^3 \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}_{-E_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}_{-E_j} =$$

$$= \varepsilon_0 \alpha \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{E_j^2}{2} = \varepsilon_0 \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{E_j^2}{2} =$$

$$= \varepsilon_0 \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\vec{E}^2}{2}. \text{ Окончательно имеем}$$

$$\vec{f} = \varepsilon_0 \alpha \cdot \nabla \frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \cdot \nabla \frac{E^2}{2}.$$

Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов

Если в системе поддерживается $T = \text{const}$, деформация среды не меняется и $\varepsilon = \text{const}$, то

$$dW = dW_{\substack{\text{энергия, поступившая} \\ \text{от внешних источников}}} + dA'_{\text{внешних сил}}.$$

Для квазистатических перемещений

$$dA'_{\text{внешних сил}} = -dA_{\text{электрического поля}} = -\sum_{i=1}^n F_i d\xi_i,$$

где ξ_i - обобщенные координаты, F_i - обобщенные силы.

$$dW_{\substack{\text{энергия, поступившая} \\ \text{от внешних источников}}} = \sum_j \varphi_j dq_j.$$

$$dW = \sum_j \varphi_j dq_j - \sum_{i=1}^n F_i d\xi_i .$$

1) Если $q_j = \text{const}$, то

$$\sum_{i=1}^n F_i d\xi_i = -dW(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = - \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{q_j = \text{const}} d\xi_i .$$

$$F_i = - \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{q_j = \text{const}} .$$

2) Если $\varphi_j = \text{const}$, то

$$dW = \frac{1}{2} \sum_j \varphi_j dq_j .$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n F_i d\xi_i = dW(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{\varphi_j = \text{const}} d\xi_i .$$

$$F_i = \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{\varphi_j = \text{const}} .$$

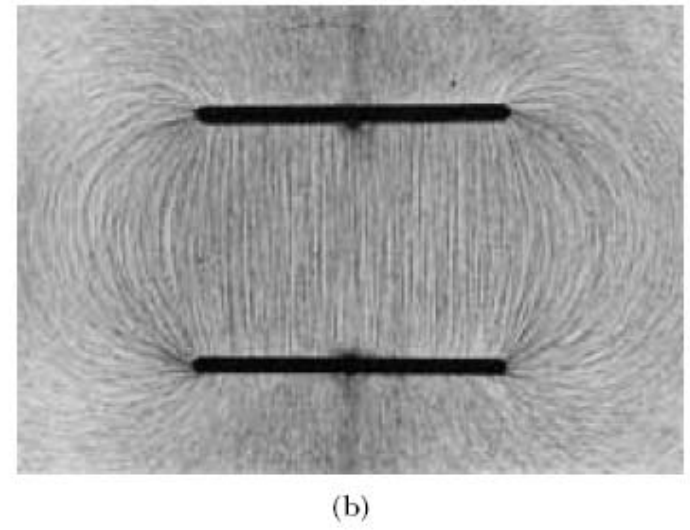
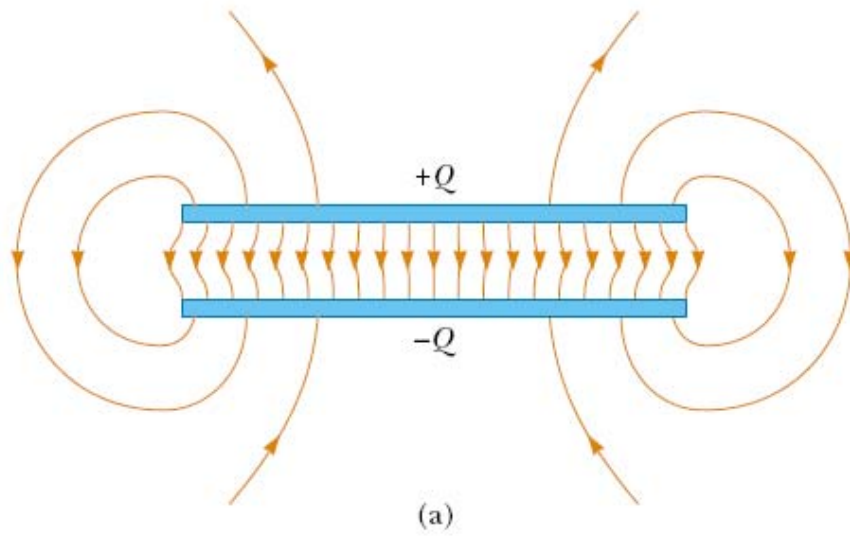
Пример. Вычислить силу притяжения пластин плоского конденсатора, помещенного в жидкий диэлектрик, если $q = const$.

$$W = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

d - обобщенная координата.

$$F_d = - \left. \frac{\partial W}{\partial d} \right|_{q=const} = - \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = - \frac{q}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = - \frac{q}{2} E.$$

В диэлектрике сила взаимодействия пластин уменьшилась в ε раз, то есть $F_d = F_d / \varepsilon$.



Σ

