Лекция 3.

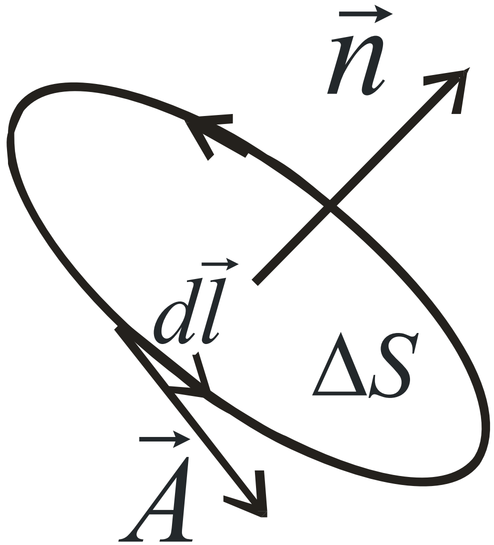
- Потенциал системы точечных зарядов и непрерывного распределения зарядов. Уравнения Лапласа и Пуассона.
- Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

Потенциал системы точечных зарядов и непрерывного распределения зарядов.

$$\varphi(r) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|},$$

$$\varphi(r) = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(r')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} dV'.$$

Ротор векторной функции

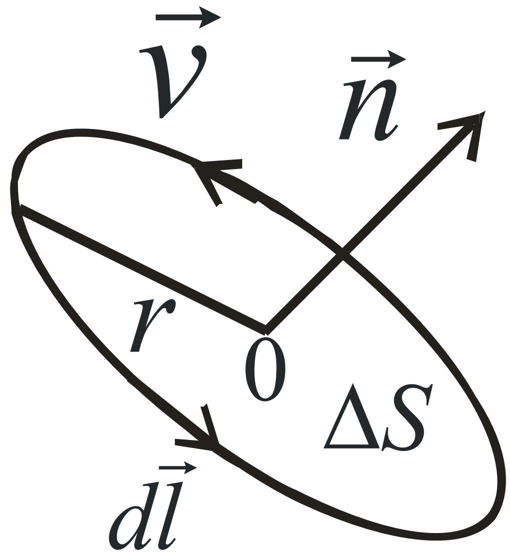


$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{A}\, d\vec{l}}{\Delta S} = (\mathrm{rot}\vec{A} \cdot \vec{n})$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Физический смысл ротора в рамках гидродинамической аналогии



$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{v} d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{v 2\pi r}{\pi r^2} = \frac{\omega r 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega$$

Физический смысл ротора в электростатике

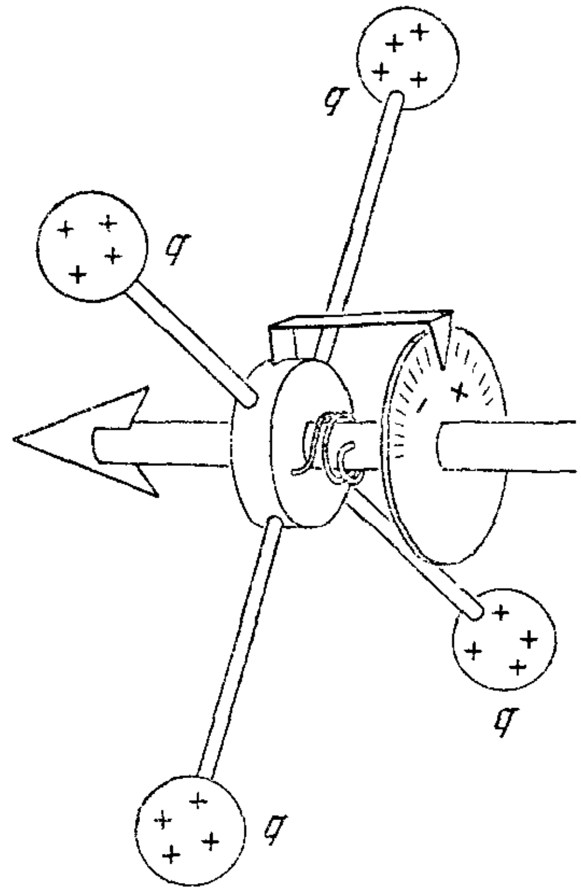


Рис. 2.30. «Ротор-метр».

Система полевых уравнений электростатики в вакууме в интегральной и дифференциальной форме.

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}, \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = 0.$$

Уравнения Лапласа и Пуассона.

Если $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то тождественно $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$. Тогда

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mathrm{div}\vec{E} = -\mathrm{div}\nabla\varphi = -\Delta\varphi, \text{ где } \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

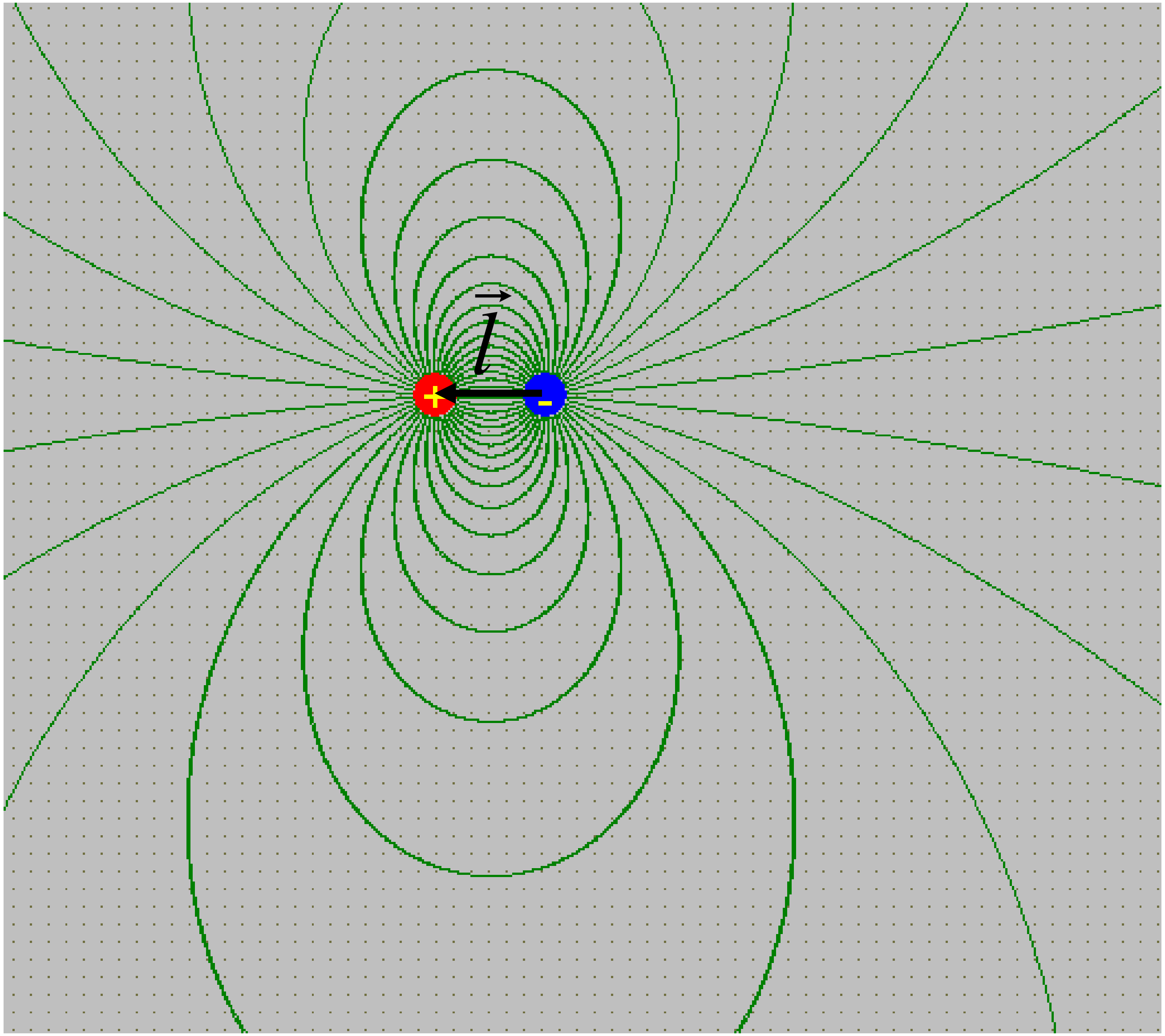
Уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

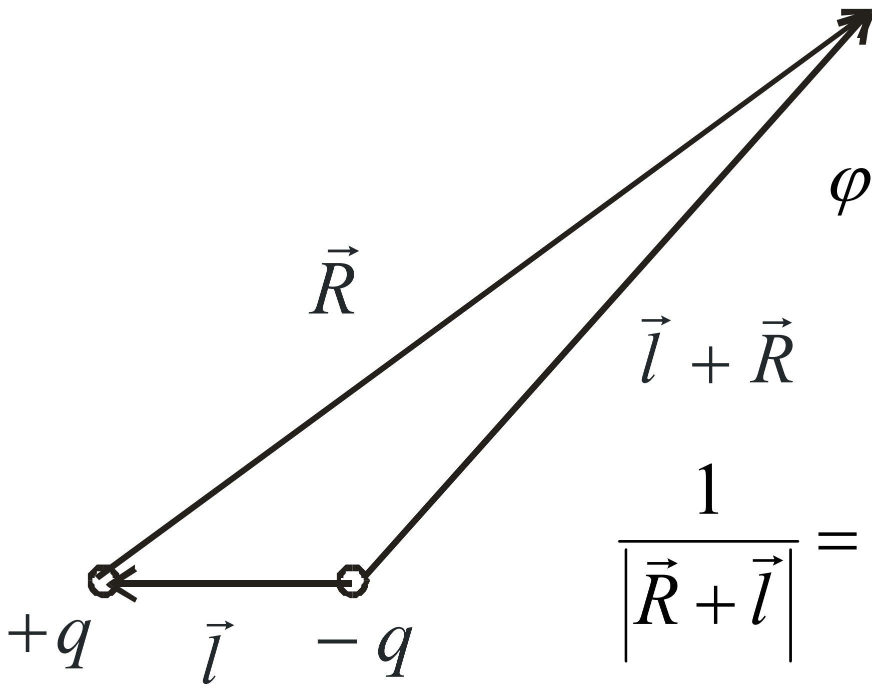
Уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Электрический диполь.



Потенциал диполя.



$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} - \frac{q}{\left|\vec{R}+\vec{l}\right|}\right), \quad \text{где } q > 0.$$

$$\frac{1}{\left|\vec{R}+\vec{l}\right|} = \frac{1}{\left[\left(\vec{R}+\vec{l}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{\left(R^2 + 2\vec{R}\vec{l} + l^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{R\left(1 + 2\dfrac{\vec{R}\vec{l}}{R^2} + \dfrac{l^2}{R^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{R} - \frac{\vec{l}\vec{R}}{R^3};$$

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}.$$

Поле диполя

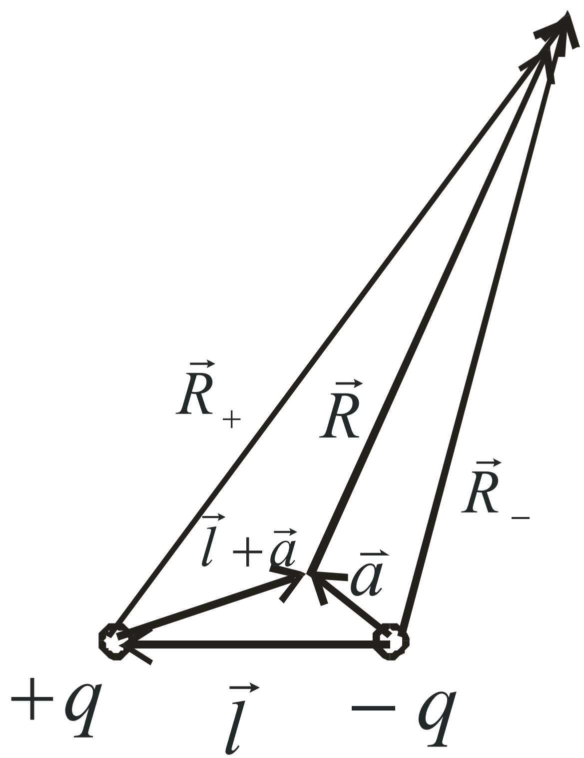
$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \qquad E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -\frac{\partial}{\partial x} k\,\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} k\,\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} = -k(\vec{p}\vec{R})\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{R^5} - k\,\frac{p_x}{R^3} =$$

$$= k\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})x}{R^5} - \frac{p_x}{R^3}\right),$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right).$$

Потенциал и поле диполя(общий случай).



$$\vec{R}_+ = \vec{l} + \vec{a} + \vec{R}$$

$$\vec{R}_- = \vec{a} + \vec{R}$$

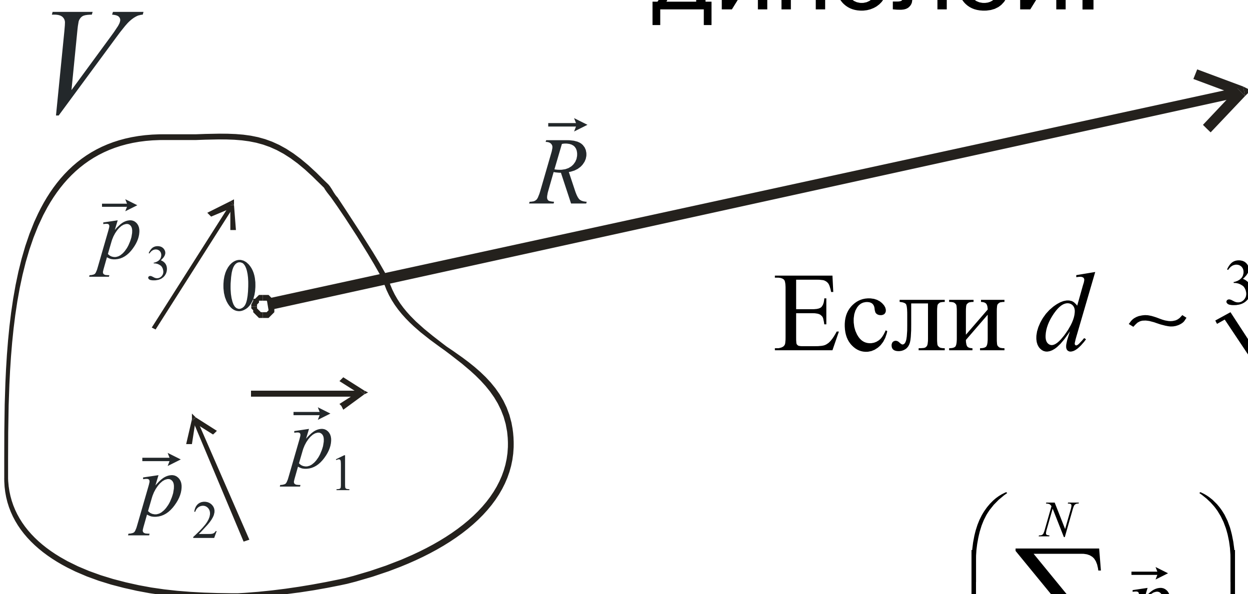
Если $\vec{l}$ и $\vec{a} << \vec{R}$,

то потенциал и поле будут равны

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{где } \vec{p} = q\vec{l}.$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right).$$

Потенциал и поле системы диполей.



Если $d \sim \sqrt[3]{V} << R$, то

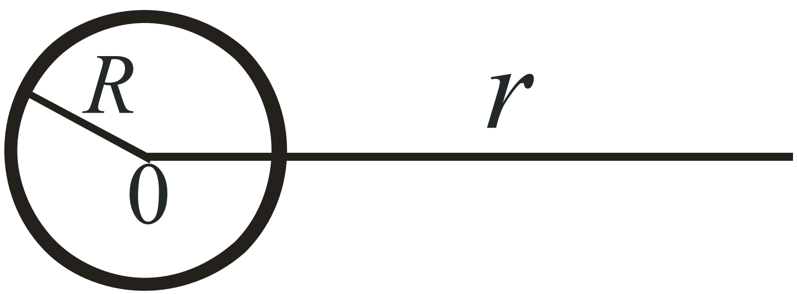
$$\varphi_d = \sum_{i=1}^{N} \varphi_d^i = \sum_{i=1}^{N} k \frac{\vec{p}_i \vec{R}}{R^3} = k \frac{\left(\sum_i^N \vec{p}_i \right) \vec{R}}{R^3} = k \frac{\vec{P}\vec{R}}{R^3},$$

где $\vec{P} = \sum_i^N \vec{p}_i$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\vec{P}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{P}}{R^3} \right).$$

Пример решения задач электростатики с помощью уравнений Пуассона и Лапласа.

- Определить потенциал однородно заряженного шара, если радиус шара *R*, а его плотность заряда *ρ*.



$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

$$\text{При } \; r > R, \;\; \Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0.$$

Общее решение этого уравнения равно

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2 .$$

Граничные условия

1) Нормировка потенциала. Если $r \to \infty$, то $\varphi \to 0$.

Отсюда $C_2 = 0$.

2) Условие точечности заряда. Если $r >> R$, то

$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$. Отсуда $C_1 = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$.

При $r \le R$, $\Delta\varphi = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Общее решение этого уравнения равно

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Граничные условия

1) Если $r \to 0$, то φ - ограничено. Отсюда $C_3 = 0$.

2) Условие непрерывности потенциала

$\varphi(R-0) = \varphi(R+0)$.

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R} = \frac{R^2\rho}{3\varepsilon_0}.$$

Находим $C_4 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ и $\varphi = -\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$.

В частности, для вектора напряженности

$$\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{имеем:}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}, \quad \text{при } r \le R;$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \ \text{при } r > R.$$