Лекция 21.

- Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя.
- Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения. Взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Вектор Умова-Пойтинга. Скорость распространения электромагнитных волн.

Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения.

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} = \rho, \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_{S_V} \vec{D}d\vec{S} = \int\limits_{V} \rho dV, \\ \oint\limits_{L} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P},$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{B} = 0, \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_{S_V} \vec{B}d\vec{S} = 0, \\ \oint\limits_{L} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \end{cases}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}),$$

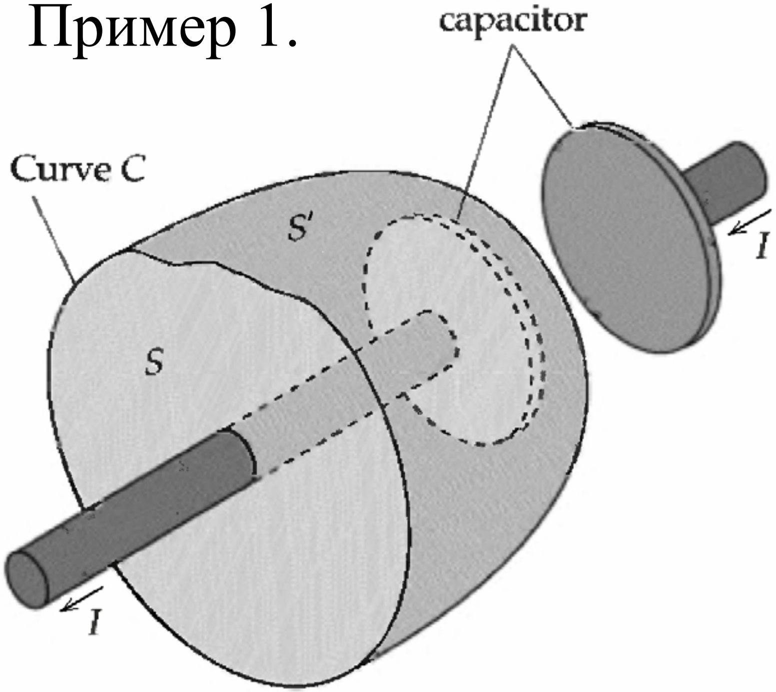
$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint\limits_{L} \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{S} \vec{B}d\vec{S}.$$

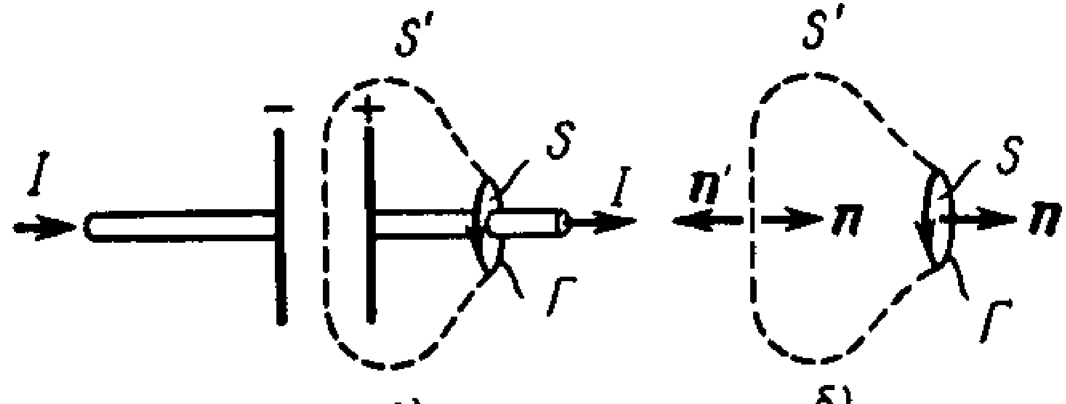
$$
\begin{cases}
\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \\
\operatorname{div}\vec{B} = 0, \\
\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \underbrace{\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\vec{J}_{см}},
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\displaystyle\int_{S_V} \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV, \\
\displaystyle\int_{S_V} \vec{B}d\vec{S} = 0, \\
\displaystyle\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}, \\
\displaystyle\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{J}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\frac{d}{dt}\int_S \vec{D}d\vec{S}}_{I_{см}},.
\end{cases}
$$

$$\vec{J}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{плотность тока смещения.}$$

$$I_{см} = \int_S \vec{J}_{см} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} - \text{ток смещения.}$$

Пример 1.



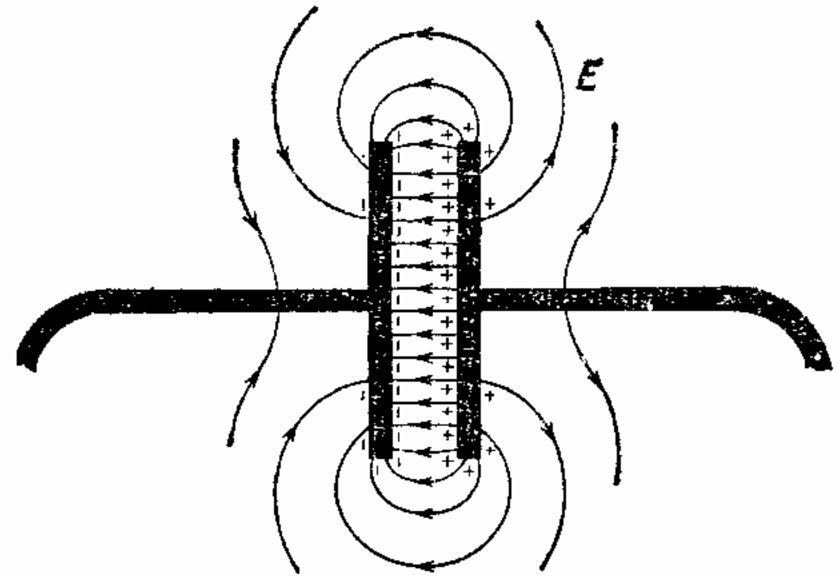


а) б)

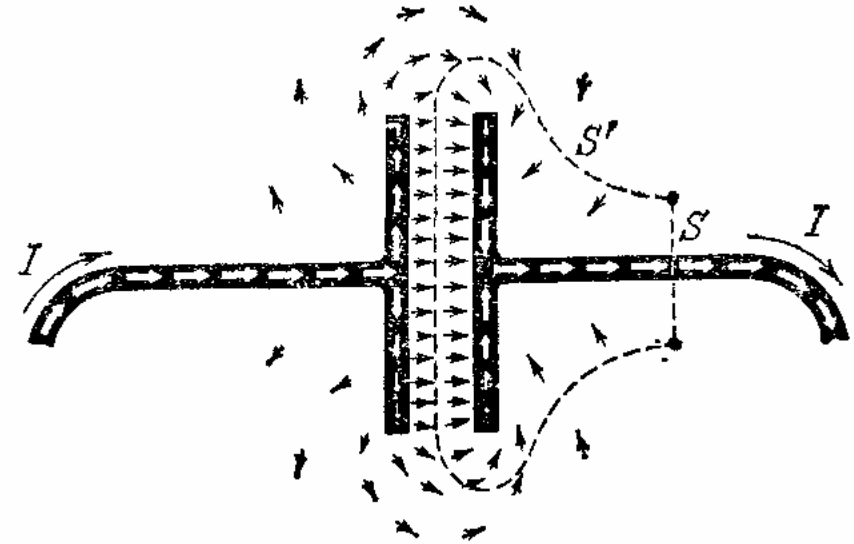
$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I = -\dfrac{dq}{dt}, \\ \int_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S}' = 0, ? \end{cases}$$

$$\oint_{S+S'} \vec{J} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint_{S+S'} \vec{D} d\vec{S} = -\oint_{S+S'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \Rightarrow \oint_{S+S'} \underbrace{\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)}_{\vec{J}_{пол}} d\vec{S} = 0.$$

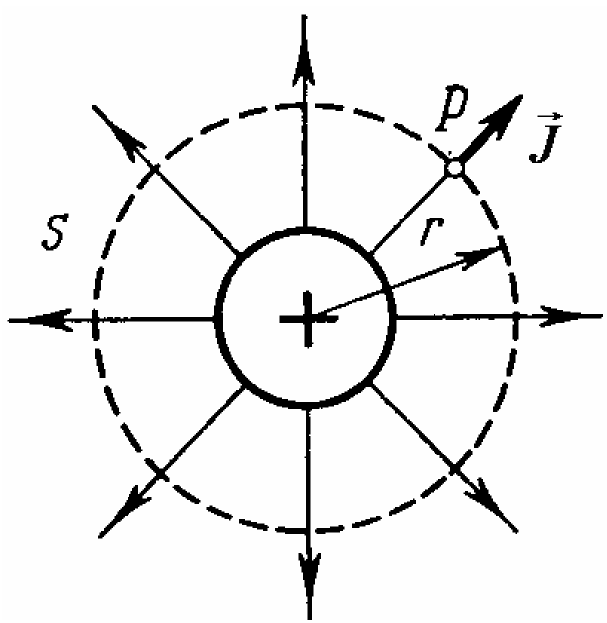
$$0 = \oint_{S+S'} \vec{J}_{пол} d\vec{S} = \int_S \vec{J}_{пол} \vec{n} dS + \int_{S'} \vec{J}_{пол} \underbrace{\vec{n}' dS}_{-\vec{n} dS}; \Rightarrow \underbrace{\int_S \vec{J}_{пол} \vec{n} dS}_{I_{пол}} = \underbrace{\int_{S'} \vec{J}_{пол} \vec{n} dS}_{I'_{пол}}.$$



Электрическое поле в определенный момент времени. Величина поля **E** всюду уменьшается со временем.



Ток проводимости (белые стрелки) и ток смещения (черные стрелки).



Пример 2.

$$\mathrm{rot}\,\underbrace{\vec{H}}_{=0} = \vec{J} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\vec{J}_{см}} = 0; \quad D4\pi r^2 = q; \Rightarrow$$

$$J = -\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial t}\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{I}{4\pi r^2};$$

Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя

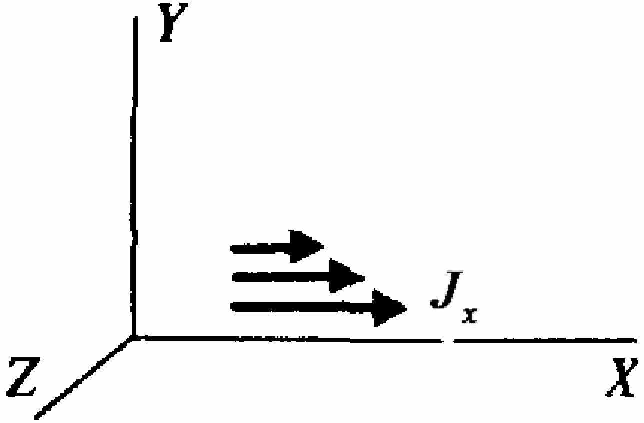
Второе условие квазистационарности: $\left|\vec{J}\right| >> \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|.$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$. Тогда, учитывая $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \vec{J} = \vec{E} / \rho,$ имеем $E_0 / \rho >> \omega\varepsilon\varepsilon_0 E_0$. Или $\omega << 1/(\varepsilon\varepsilon_0 \rho)$. Для меди

$$1/(\varepsilon_0 \rho) = 1/(8{,}85 \cdot 10^{-12} \, Ф/м \cdot 1{,}72 \cdot 10^{-8} \, Ом \cdot м) = 6{,}6 \cdot 10^{18} \, рад/с$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}, \end{cases} \qquad \underbrace{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E})}_{\mathrm{grad}\cdot\underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{=\rho=0} - \Delta\vec{E}} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathrm{rot}(\mu\mu_0 \vec{H})}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t};$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{\mu\mu_0}{\rho}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$



Скин-эффект в бесконечном проводнике с плоской границей

$$\frac{\partial^2 E_x(y,t)}{\partial y^2} = \frac{\mu\mu_0}{\rho}\frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Полагая $E_x(y,t) = E_0(y)e^{i\omega t}$, имеем

$$\frac{\partial^2 E_0(y)}{\partial y^2} = \frac{\mu\mu_0}{\rho} i\omega E_0(y).$$

$$E_0(y) = Ae^{-ky} + Be^{ky}, \quad k^2 E_0(y) = i\frac{\mu\mu_0\omega}{\rho}E_0(y), \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{\mu\mu_0\omega}{2\rho}.$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\delta}\sqrt{i} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\delta}\frac{i+1}{\sqrt{2}}.$$

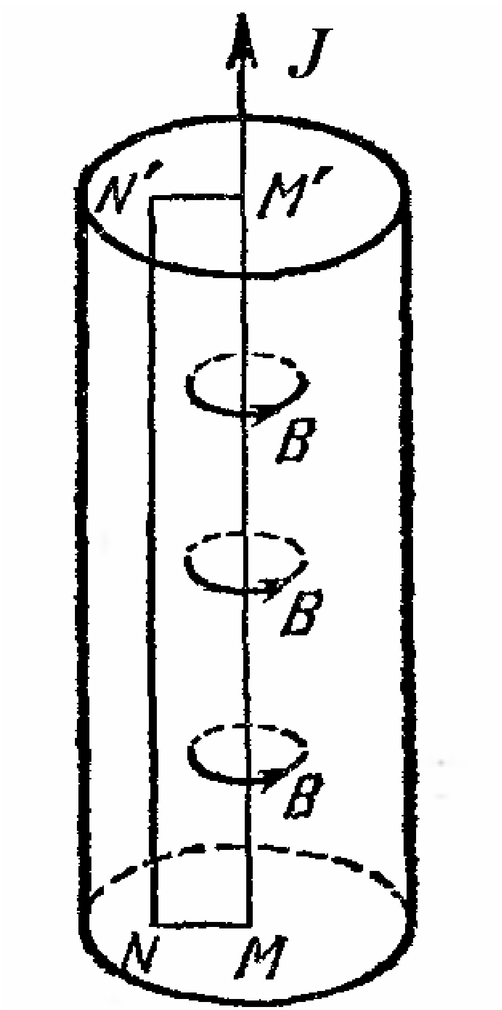
Из граничных условий:

$\left|E_0(y)\right| < \infty$ при у $\to \infty$, $\Rightarrow B = 0.$

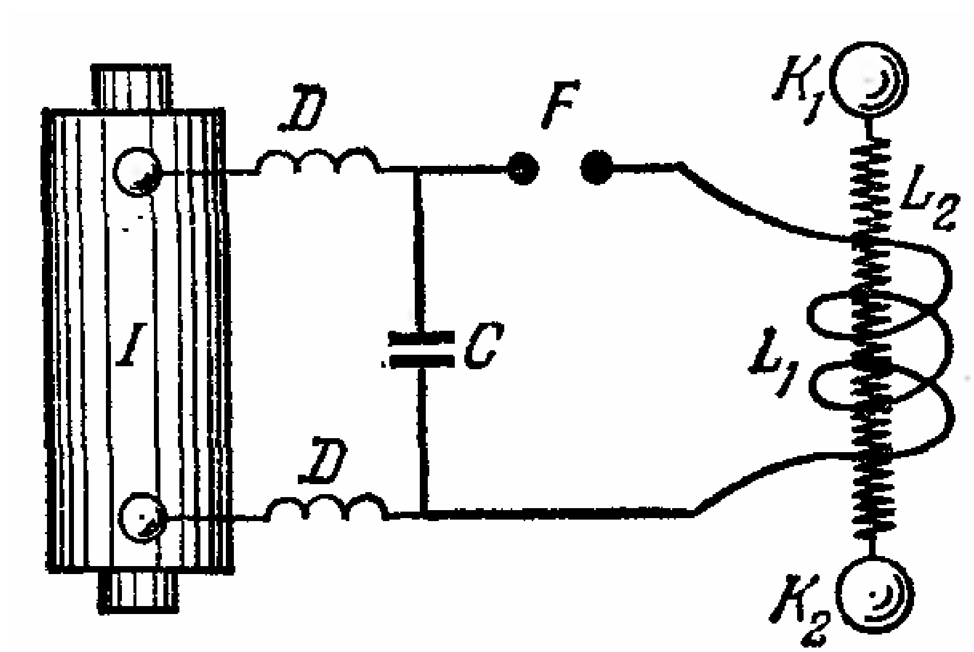
$$E_x(y,t) = Ae^{-\frac{x}{\delta}(1+i)}e^{i\omega t} = Ae^{-\frac{x}{\delta}}e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}.\ \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\mu_0\omega}} -$$

-толщина скин-слоя.

Например, если ω=10^4 рад/с$^{-1}$, ρ=$1,72\cdot10^{-8}$ $Ом\cdot м$ (медь), μ=1, μ_0=$1,27\cdot10^{-6}$ Гн/м , δ=1,65$мм$.



Высокочастотный резонансный трансформатор Тесла



Взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны. Волновое уравнение.

Рассмотрим электромагнитное поле в однородной изотропной и бесконечной среде или в вакууме при ρ=0 и $J = 0$.

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0, \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \\ \mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}), \\ \mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{grad}\ \underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{=0} - \Delta\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{B} = -\mu\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}, \\ \mathrm{grad}\ \underbrace{\mathrm{div}\vec{H}}_{=0} - \Delta\vec{H} = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{D} = -\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \underbrace{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}_{1/v^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta\vec{H} - \underbrace{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}_{1/v^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0, \end{cases}$$

Где $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}(z,t), \vec{H} = \vec{H}(z,t)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \Rightarrow \vec{E}(t - \dfrac{z}{v}), \\ \Delta \vec{H} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \Rightarrow \vec{H}(t - \dfrac{z}{v}), \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[\omega(t - \frac{z}{v})] = \vec{E}_0 \cos[\omega t - \overbrace{\frac{\omega}{v}}^{k} z] = \vec{E}_0 \cos[\omega t - kz],$$

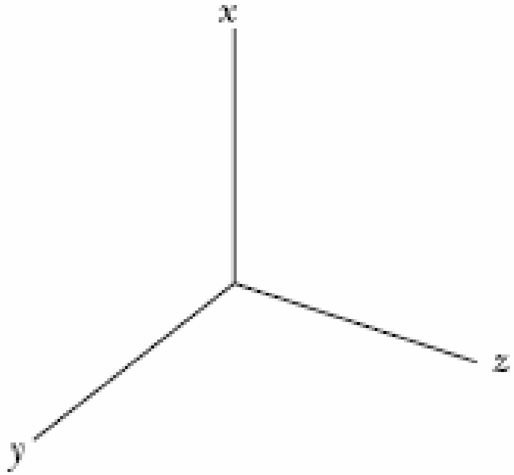
$$\left(\frac{\omega}{k} = v \ \ \text{по определению } k \right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[\omega t - \vec{k}\vec{r}] = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Аналогично $\vec{H}_0 \cos[\omega t - \vec{k}\vec{r}] = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$.

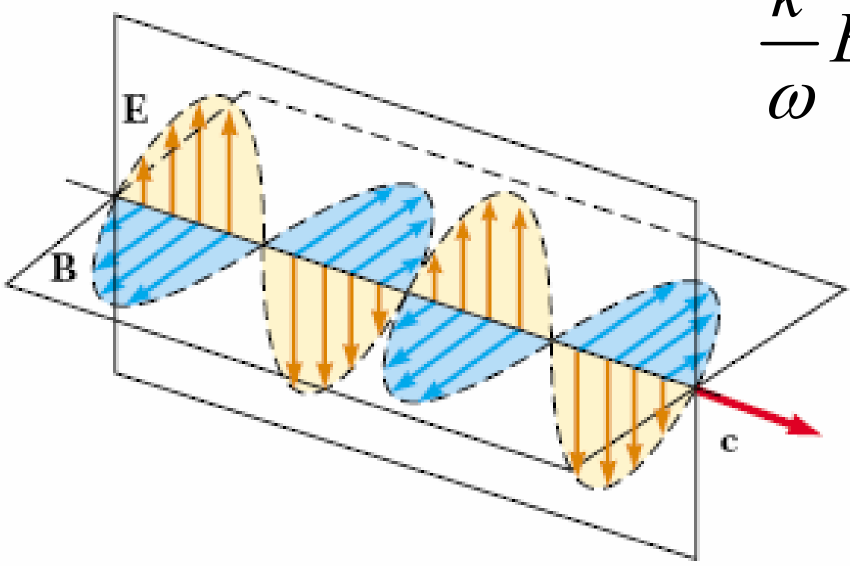
$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = i\omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}; \mathrm{rot}\vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = -i[\vec{k}, \vec{E}],$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}.$$



$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [-i\vec{k}, \vec{E}] = -i\omega\vec{B} = -i\omega\mu\mu_0\vec{H}, \\ [-i\vec{k}, \vec{H}] = i\omega\vec{D} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \end{cases}$$

$$\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$$



$$\frac{k}{\omega}E_x = \mu\mu_0 H_y, \quad \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0},$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_x = \sqrt{\mu\mu_0}H_y,$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{\omega} = Tv$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Вектор Умова-Пойтинга.

$$w = \vec{E}\vec{D}/2 + \vec{H}\vec{B}/2$$

Учитывая равенства $\vec{D} = -[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}],\ \vec{B} = [\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}],$ имеем

$$w = -\vec{E}[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}]/2 + \vec{H}[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}]/2 = \vec{H}[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}] = \frac{\vec{k}}{\omega}[\vec{E}, \vec{H}].$$

$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] -$ вектор Умова-Пойтинга, $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$,

$\left|\vec{S}\right| = \frac{\omega}{k} w = vw = |$ для вакуума $| = cw.$

Вектор Умова-Пойтинга (строгий вывод).

$$P=\int\limits_{\infty}\vec{J}\vec{E}dV=\int\limits_{\infty}(\mathrm{rot}\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\vec{E}dV=|\,\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]=\mathrm{rot}\vec{E}\cdot\vec{H}-\mathrm{rot}\vec{H}\cdot\vec{E}\,|=$$

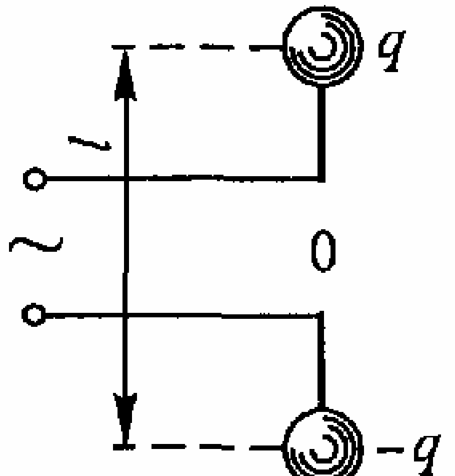
$$=\int\limits_{\infty}(\underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}}_{=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}\cdot\vec{H}-\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\vec{E})dV=-\int\limits_{\infty}\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]dV+$$

$$+\int\limits_{\infty}(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\vec{E})dV=|\,\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H};\quad\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\,|=$$

$$-\int\limits_{S_{R\to\infty}}\underbrace{[\vec{E},\vec{H}]}_{\vec{S}}d\vec{\sigma}-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}\underbrace{(\frac{\vec{H}\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}\vec{D}}{2})}_{w}dV;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int\limits_{\infty}wdV}_{W_{\text{электр.поля}}}=-P-\int\limits_{S_{R\to\infty}}\underbrace{[\vec{E},\vec{H}]}_{\vec{S}}d\vec{\sigma};\Rightarrow\vec{S}=[\vec{E},\vec{H}]-$$ поток энергии электромагнитного поля.

Излучение электромагнитных волн элементарным диполем.

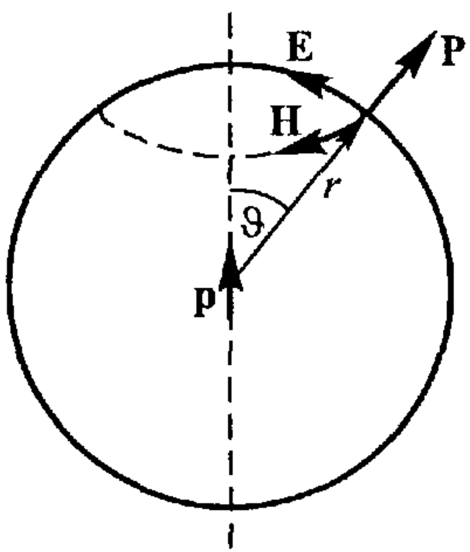


Элементарный диполь

$p = p_0 \sin \omega t$, где $p_0 = q_0 l$;

$I = dq/dt = q_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t, p_0 = I_0 l/\omega.$

При $r \gg \lambda$ – волновая зона, поле равно

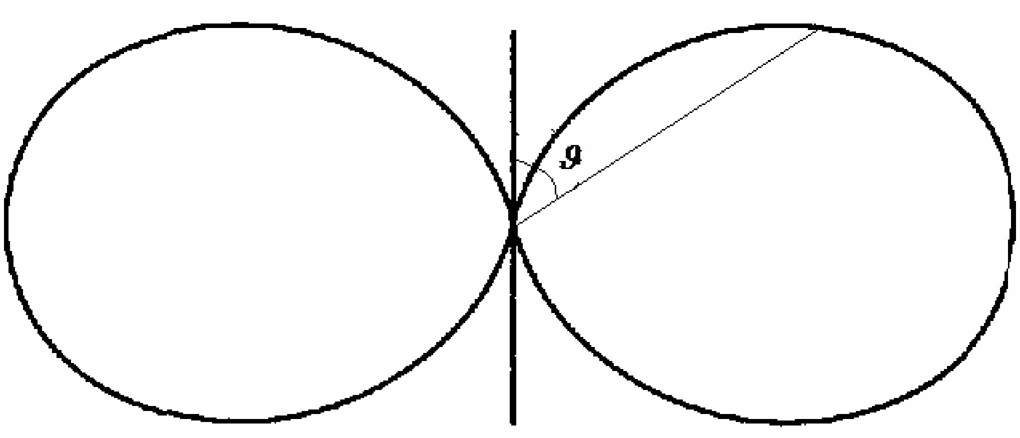


$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\ddot{p}(t - r/c)\sin\vartheta}{c^2 r},$$

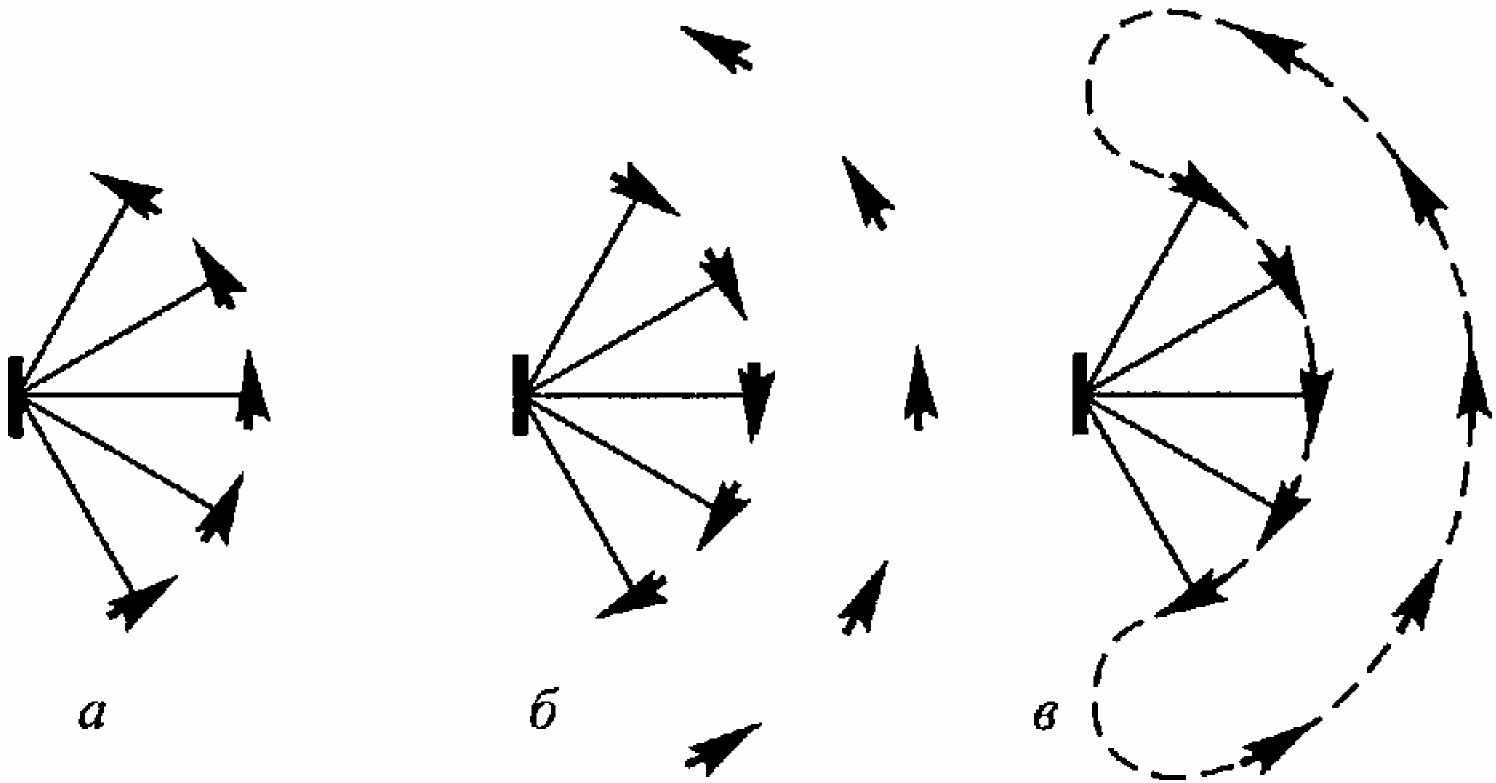
$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E.$$

Для гармонических колебаний $\ddot{p}(t - r/c) = -p_0\omega^2 \sin[\omega(t - r/c)]$.

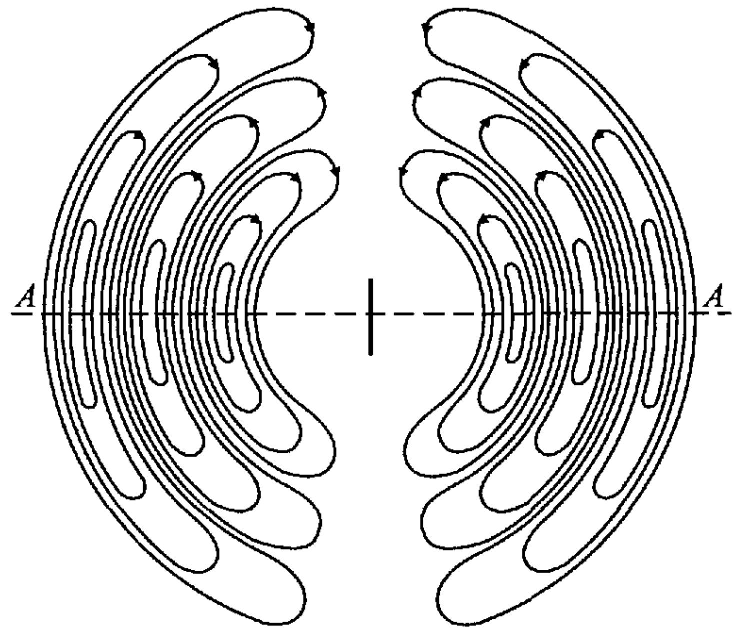
$$S = EH = \frac{p_0{}^2\omega^4 \sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2[\omega(t - r/c)]; \Rightarrow < S >= \frac{p_0{}^2\omega^4 \sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\frac{1}{2}.$$



$$dW_{\text{изл.}} = \int\limits_{S_r} S d\sigma = \int\limits_{S_r} S 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta = \frac{1}{12\pi}\frac{p_0^2\omega^4}{\varepsilon_0 c^3}.$$



Форма линий напряженности поля излучающего диполя



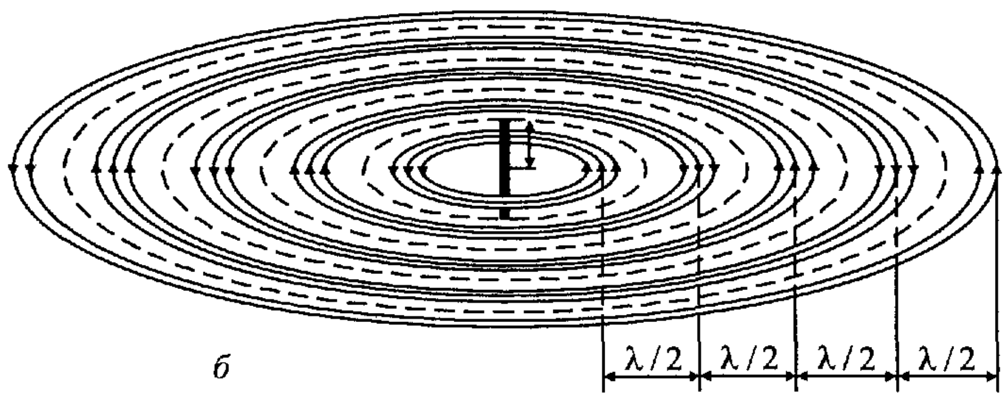
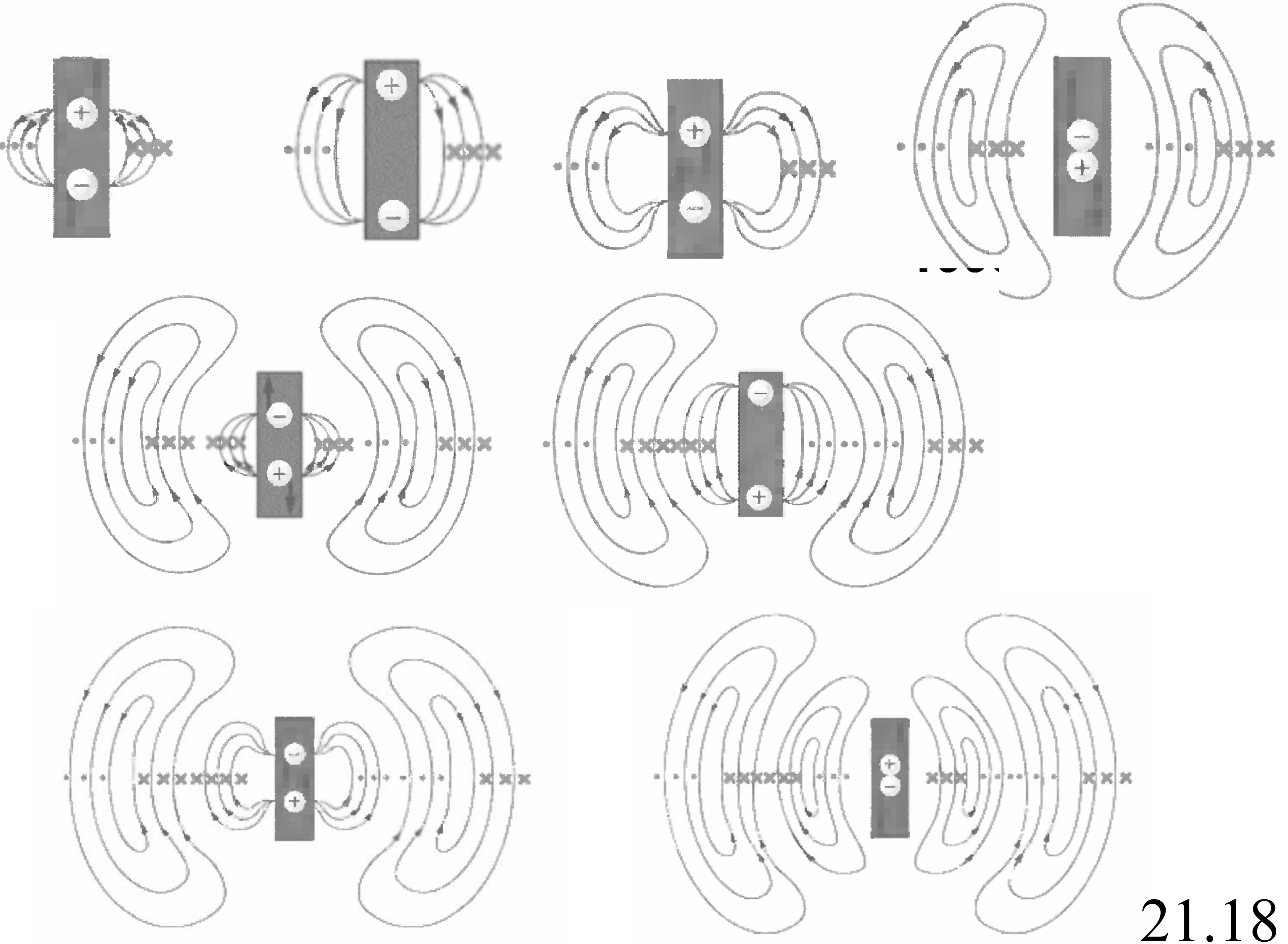


Рис 425 Линии напряженности (*а*) и индукции (*б*) в шаровой электромагнитной волне диполя



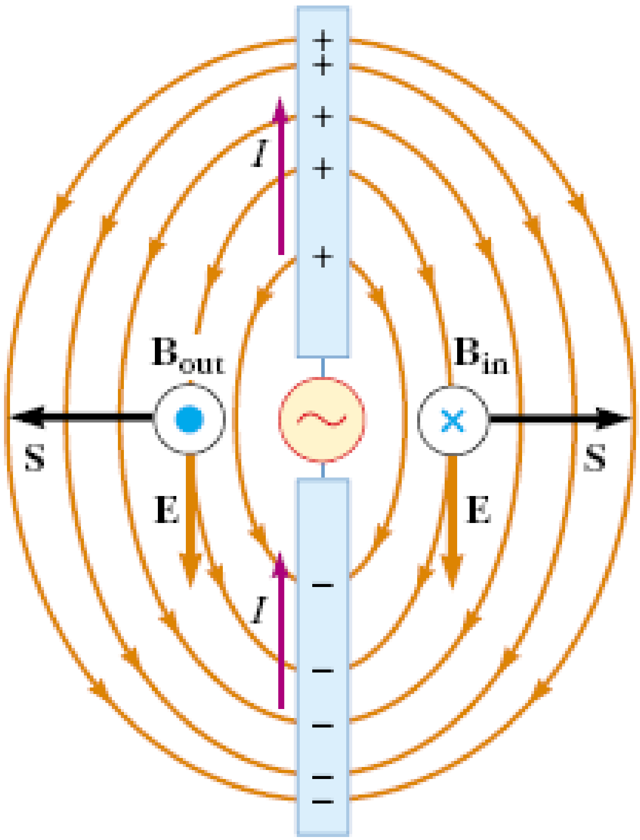
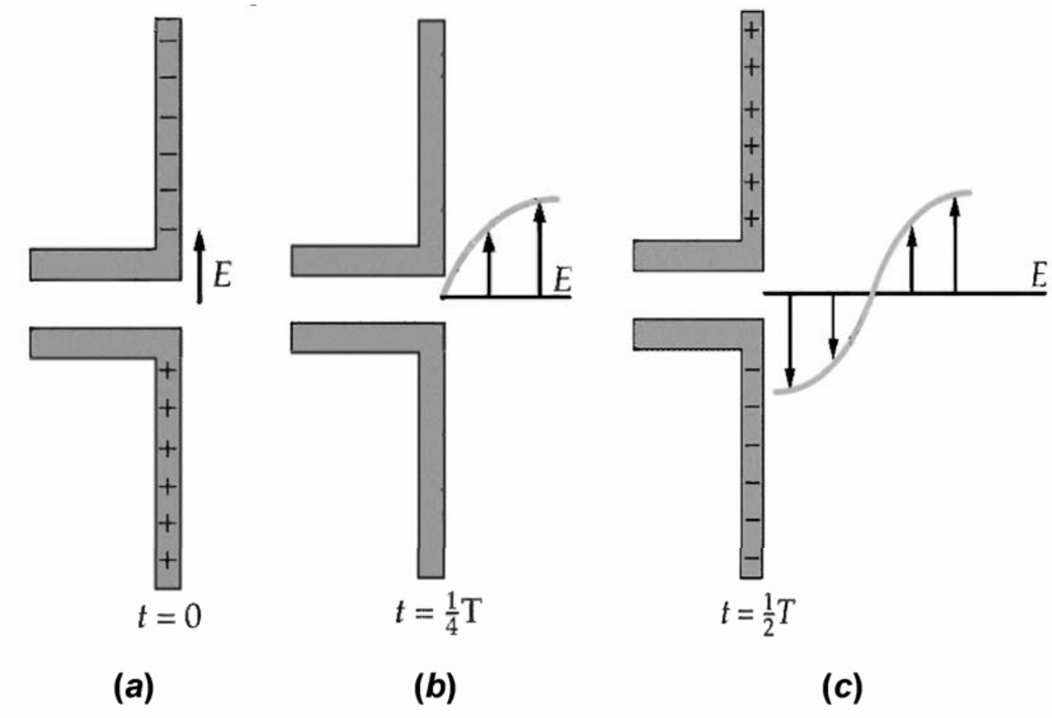
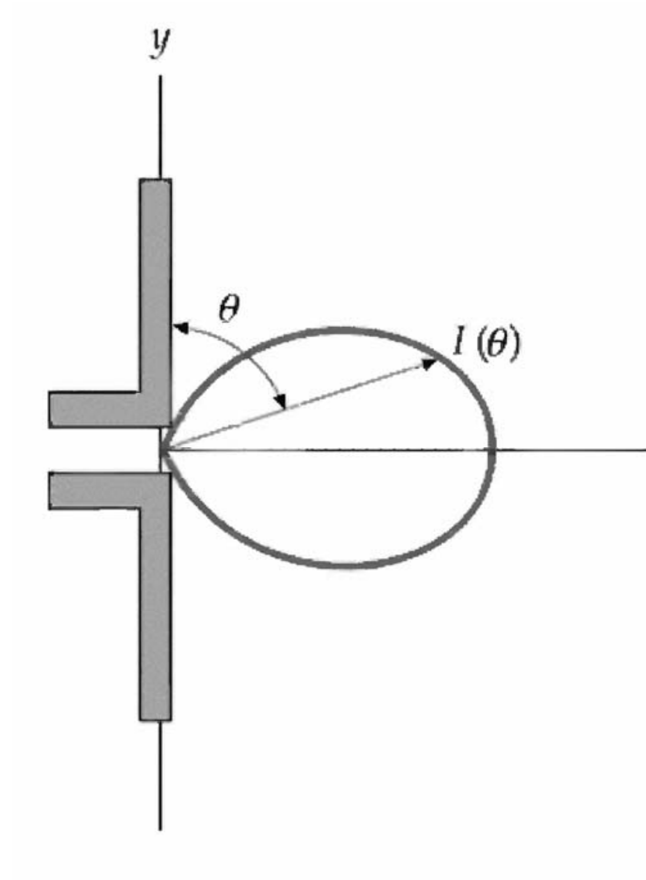
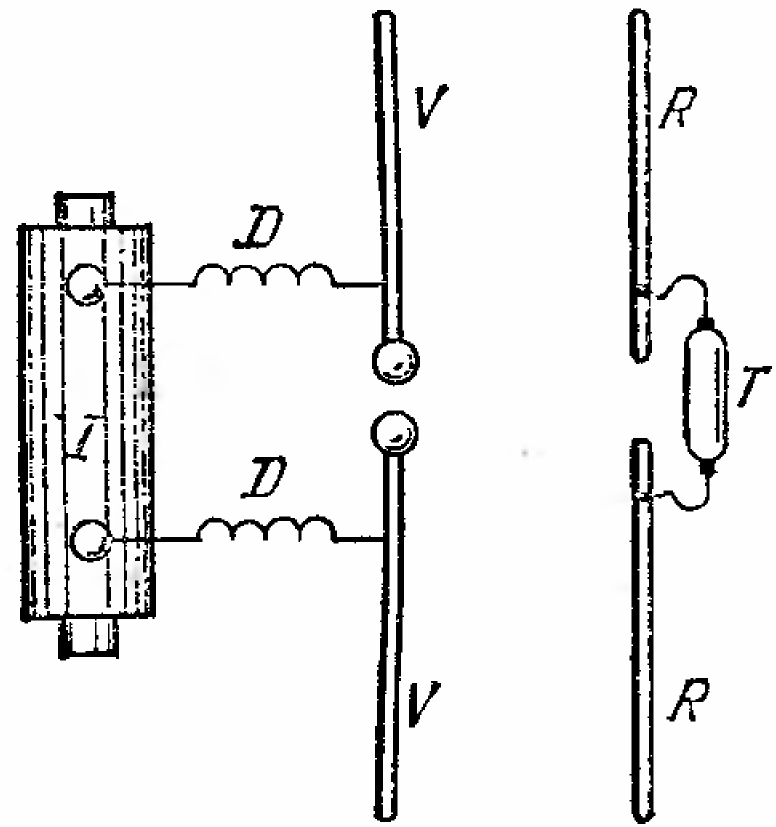


Figure 34.10 A half-wave antenna consists of two metal rods connected to an alternating voltage source. This diagram shows **E** and **B** at an arbitrary instant when the current is upward. Note that the electric field lines resemble those of a dipole (shown in Fig. 23.22).


E
E
E
t = 0
t = ¼T
t = ½T
(a)
(b)
(c)


y
θ
I (θ)

Электромагнитные волны обнаружены Генрихом Герцем в 1888 году с помощью вибратора Герца.



Поле стоячей электромагнитной волны.

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_0\cos(\omega t - kz), \quad H_y = H_0\cos(\omega t - kz),\\ E_x &= E_0\cos(\omega t + kz), \quad H_y = -H_0\cos(\omega t + kz). \end{aligned}\right| +$$

$$E_x = 2E_0\cos kz\cos\omega t, H_y = 2H_0\sin kz\sin\omega t.$$