Лекция 19.

- Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе. Ширина резонансной кривой.
- Резонанс токов. Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.
- Работа и мощность переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения.

Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе.

Исследуем зависимость амплитуды $U_{c,0}$ и фазы φ от частоты ω вынуждающей ЭДС (напряжения) в последовательном RLC контуре.

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos\omega t,$$

$$U_c = \frac{q}{c} = \frac{x_0}{c\rho}\cos(\omega t - \varphi), \text{ где } \rho = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$U_{c,0} = \frac{x_0}{c\rho} = \frac{\mathscr{E}_0}{Lc\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{\mathscr{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

При $\omega \to 0, \ U_{c,0} \to \mathscr{E}_0 -$ статическое напряжение.

При $\omega \to \infty, \ U_{c,0} \to 0.$

$$\frac{dU_{c,0}}{d\omega} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\rho^3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)2\omega + 4\gamma^2 2\omega\right] = 0;$$

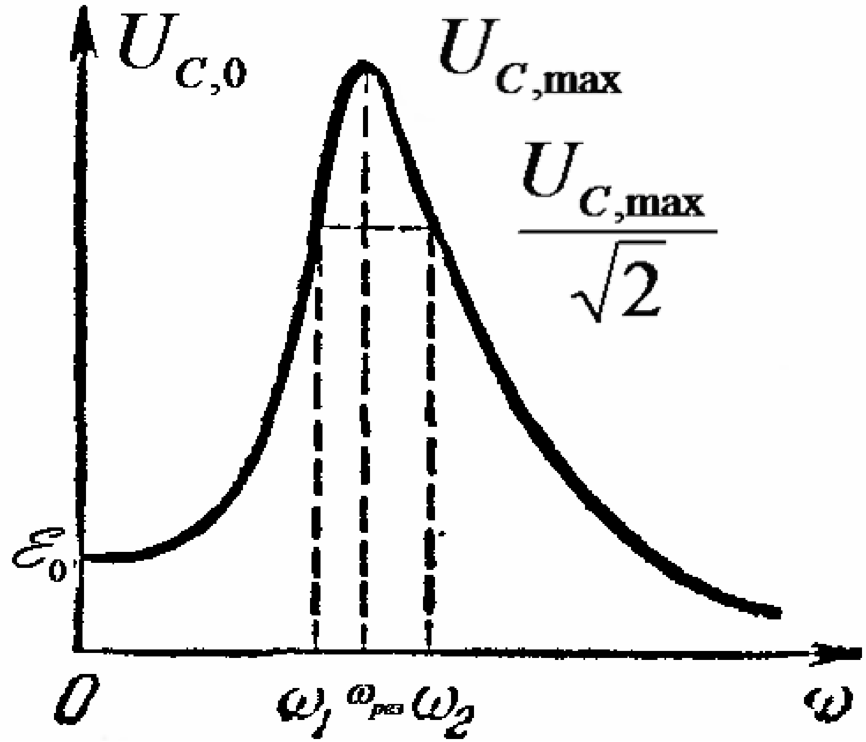
$$\omega_{рез}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2; \quad \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

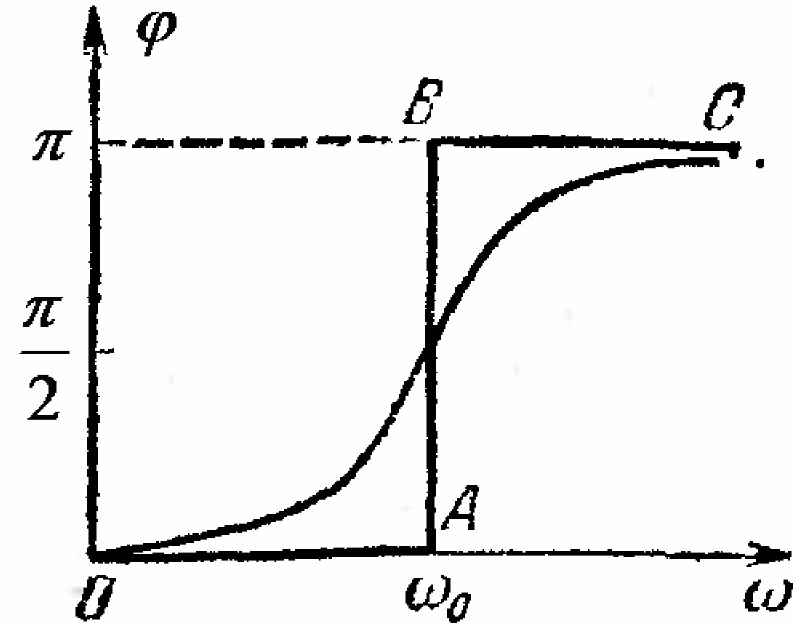
$$U_{c,\max} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

В частности, если $\gamma << \omega_0$, то

$$U_{c,\max} = \mathcal{E}_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} = \mathcal{E}_0 \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{c}}, \quad \frac{U_{c,\max}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\gamma} =$$

$$= \frac{\pi}{T\gamma} = \frac{\pi}{\theta} = Q - \text{добротность контура.}$$





$$U_{c,0} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$U_{L,0} = \omega L I_0 = \omega^2 \underbrace{Lc}_{1/\omega_0^2} \underbrace{\frac{1}{\omega c} I_0}_{U_{c,0}} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} U_{c,0}.$$

При резонансе $\omega = \omega_{рез} \approx \omega_0$, если $\gamma << \omega_0$,

тогда $U_{L,0} = U_{c,0} = \mathcal{E}_0 Q$.

Фаза отличается на π.

Ширина резонансной кривой.

$$\frac{U_{c,\max}}{\sqrt{2}} = U_{c,0}(\omega); \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}};$$

$$8\gamma^2(\omega_0^2-\gamma^2) = \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2;$$

$$4\gamma^2\omega_0^2-4\gamma^4 = \underbrace{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}_{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}+\underbrace{4\gamma^2\omega^2-4\gamma^2\omega_0^2}_{4\gamma^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}+4\gamma^4 =$$

$$=(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2)^2;$$

$$\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2 = \pm 2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2};\Rightarrow$$

$$\omega^2{}_1 = \underbrace{\omega_0^2-2\gamma^2}_{\omega_{рез}^2}-2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2};\omega^2{}_2 = \underbrace{\omega_0^2-2\gamma^2}_{\omega_{рез}^2}+2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2};$$

Если $\gamma << \omega_0$, то $\omega^2{}_1 = \omega_0^2 - 2\gamma\omega_0; \quad \omega^2{}_2 = \omega_0^2 + 2\gamma\omega_0; \Rightarrow$

$\omega_1 = \omega_0 - \gamma; \quad \omega_2 = \omega_0 + \gamma; \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma.$

$\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = \dfrac{\omega_0}{2\gamma} = \dfrac{2\pi}{2\gamma T} = \dfrac{\pi}{\theta} = Q -$ добротность контура.

Точные оценки дают

$\omega_{рез} - \omega_1 > \omega_2 - \omega_{рез}$

(в отличие от рисунка 301 в [3])

Токи при резонансе.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\omega x_0}{\rho} \sin(\omega t - \varphi) = \underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0} \cos\left(\omega t - \underbrace{(\varphi - \frac{\pi}{2})}_{\phi}\right).$$

$$\mathrm{tg}\,\phi = \mathrm{tg}(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\mathrm{ctg}\,\varphi = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi} = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} =$$

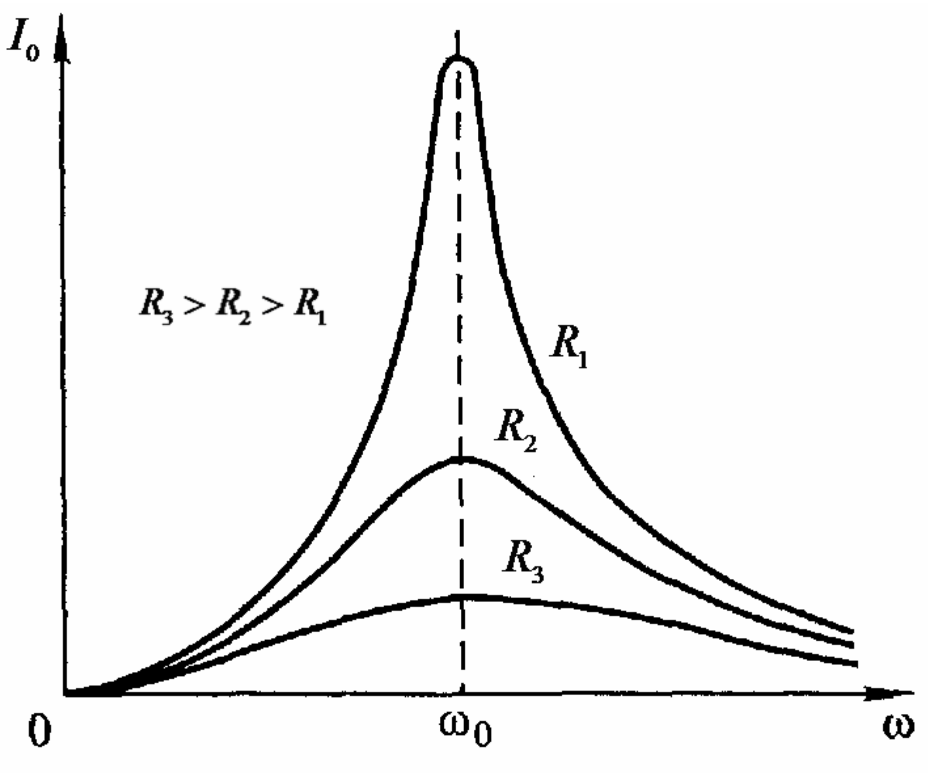
$$= -\frac{\frac{1}{Lc} - \omega^2}{2\frac{R}{2L}\omega} = -\frac{\frac{1}{\omega c} - \omega L}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

$$I=\frac{dq}{dt}=\underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0}\cos(\omega t-\phi);\, I_0=\frac{\omega x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}=$$

$$=\frac{\omega\mathcal{E}_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{Lc}-\omega^2\right)^2+4\left(\frac{R}{2L}\right)^2\omega^2}}=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega c}-L\omega\right)^2+R^2}}.$$

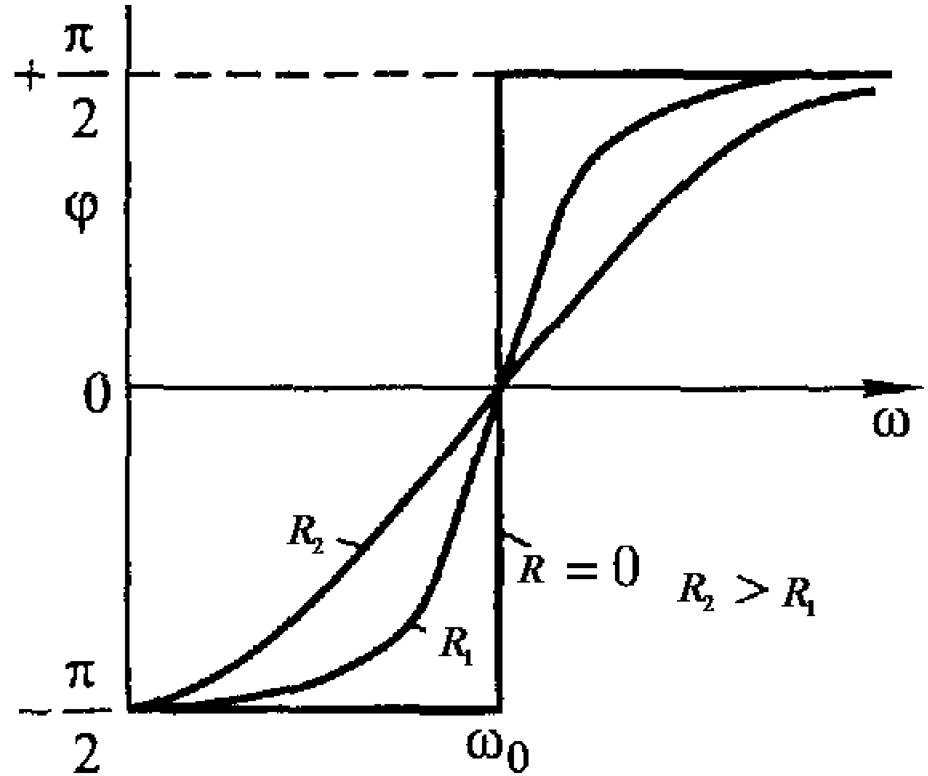
$$I=\underbrace{\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)^2}}}_{I_0}\cos(\omega t-\phi);\quad \mathrm{tg}\phi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega c}}{R}.$$

$$\omega_{рез}=\omega_0$$



Резонансные кривые

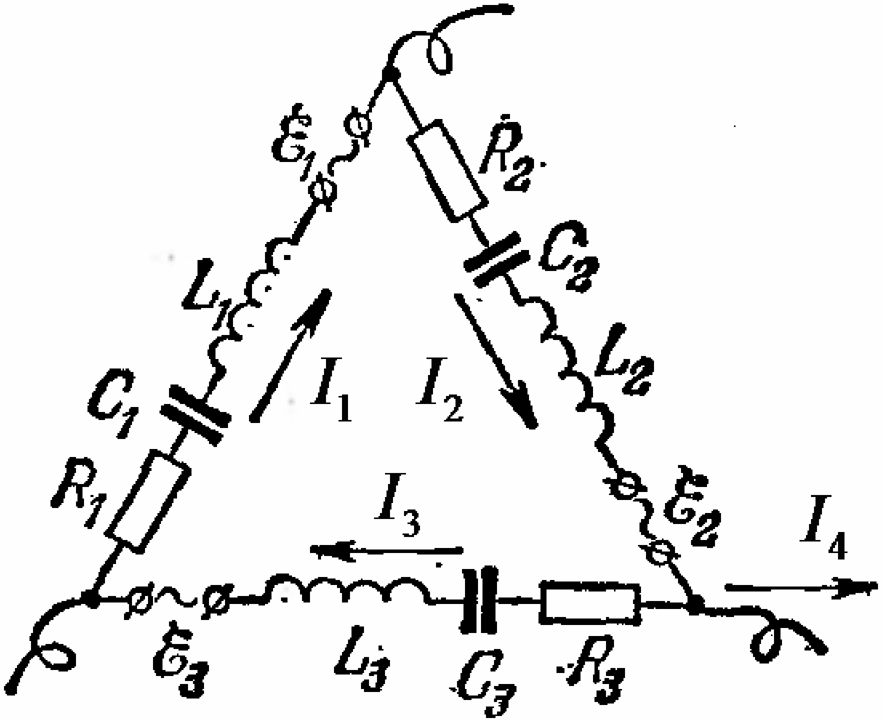
(АЧХ)



Изменение сдвига фазы колебаний тока при изменении частоты ЭДС

(ФЧХ)

Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.

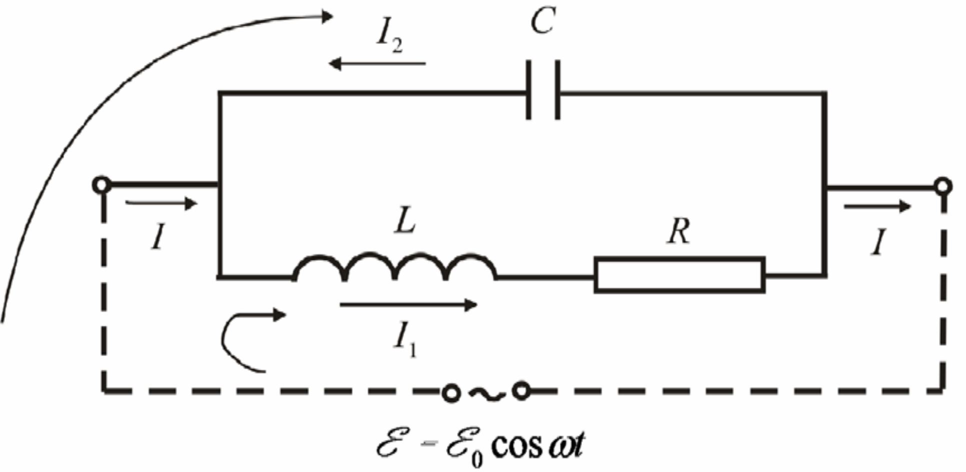


$$I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

$$\sum_n I_n = 0.$$

$$\left.\begin{aligned}
&I_{1K} Z_1 = \mathcal{E}_{1K},\ \text{где}\ Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega c_1} + i\omega L_1,\\
&I_{2K} Z_2 = \mathcal{E}_{2K},\ \text{где}\ Z_2 = R_2 + \frac{1}{i\omega c_2} + i\omega L_2,\\
&I_{3K} Z_3 = \mathcal{E}_{3K},\ \text{где}\ Z_3 = R_3 + \frac{1}{i\omega c_3} + i\omega L_3,
\end{aligned}\right\} \sum_n I_{nK} Z_n = \mathcal{E}_{nK}$$

Резонанс токов.

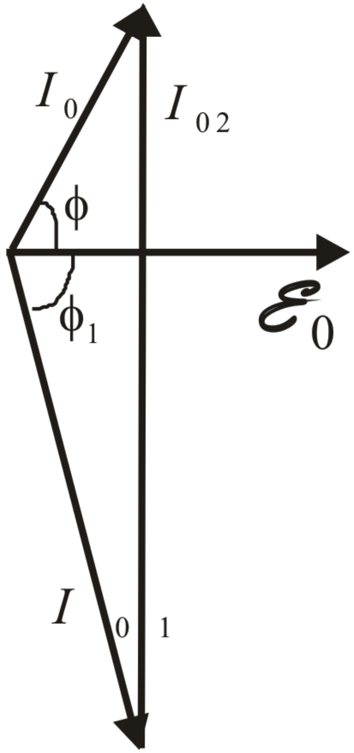


$$\begin{cases} I_1(i\omega L + R) = \mathcal{E}, \\ -I_2 \dfrac{1}{i\omega c} = \mathcal{E}, \\ I_1 = I + I_2, \end{cases}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + i\omega L} + \mathcal{E} \cdot i\omega c = \frac{\mathcal{E}(R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} + \mathcal{E} \cdot i\omega c =$$

$$= \left[\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \right] \mathcal{E},$$

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \cdot \mathcal{E}_0; \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{\omega c - \dfrac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}};$$



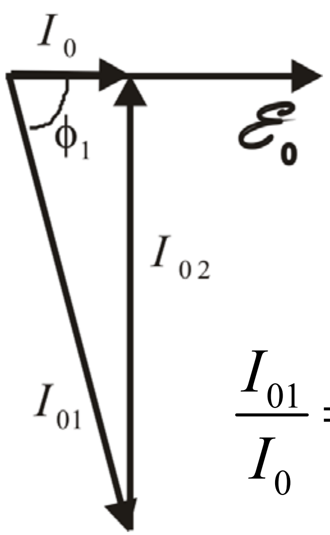
Векторная дигрaмма токов

$$I_{01} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \mathrm{tg}\,\phi_1 = -\frac{\omega L}{R};$$

Если $\omega L >> R$, то $\phi_1 \approx \pi / 2.$

$$I_0 \approx \sqrt{\left(\frac{R}{\omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \cdot \mathscr{E}_0 = \frac{R}{\omega^2 L^2}\mathscr{E}_0; \Rightarrow$$

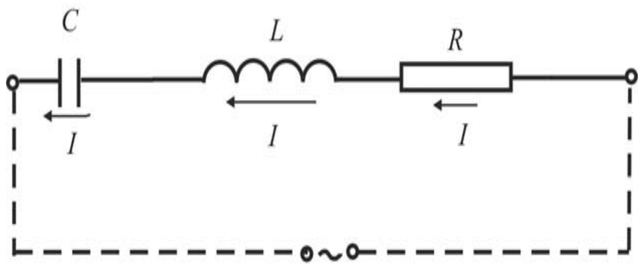
$$I_0 = \min, \text{ если } \omega{=}\omega_0^2 = \frac{1}{Lc}.$$



$$\mathrm{tg}\,\phi \approx \frac{\omega^2 L^2}{R}\left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right) = 0, \text{ если } \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{Lc};$$

$$\frac{I_{01}}{I_0} = \frac{\dfrac{\mathscr{E}_0}{\omega_0 L}}{\dfrac{R}{\omega_0{}^2 L^2}\mathscr{E}_0} = \frac{\omega_0 L}{R}\frac{2}{2} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{T_0 \gamma} = Q; I_{02} = \mathscr{E}_0 \omega_0 c = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega_0 L} = I_{01};$$

Работа и мощность переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения



$U = U_0 \cos\omega t$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + i\omega L - i\dfrac{1}{\omega c}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\phi}} = \frac{U_0 e^{i\omega t - i\phi}}{|Z|},$$

$$\text{где } |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2};\ \mathrm{tg}\phi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega c}}{R}.$$

$$I = \frac{U_0}{|Z|}\cos(\omega t - \phi) = I_0 \cos(\omega t - \phi); \Rightarrow P = UI = U_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= [2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)] = \frac{I_0 U_0}{2}[\cos(\omega t - \phi) + \cos(\phi)].$$

$$< P > = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P dt = \frac{I_0 U_0}{2}\cos\phi = \underbrace{[U_0 \cos\phi = I_0 R]}_{\text{см. векторную диаграму}} = \frac{I_0{}^2 R}{2} = I_e{}^2 R,$$

$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} -$ эффективное значение тока,

$U_e = \frac{U_0}{\sqrt{2}} -$ называется эффективным значением напряжения.

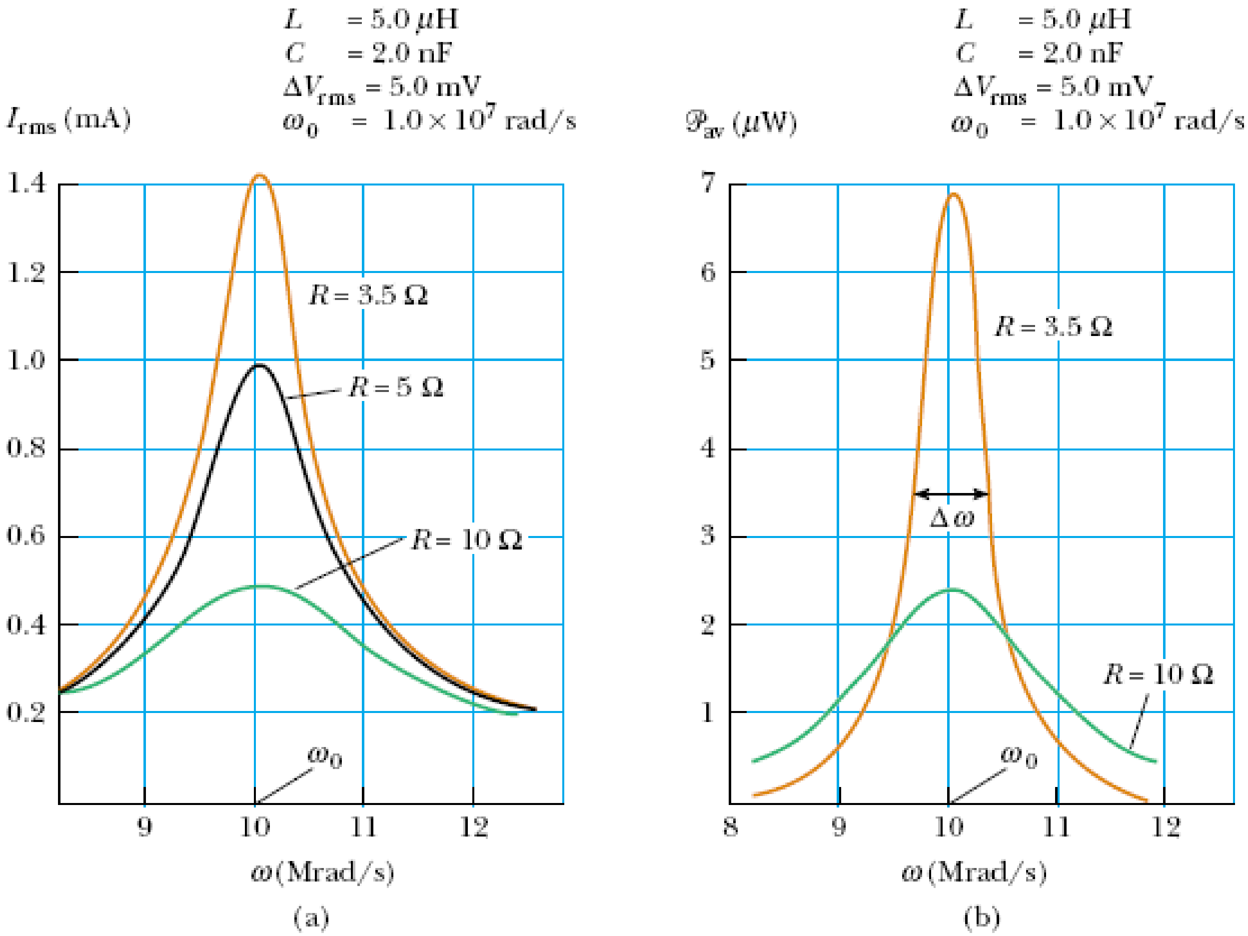
$\cos\phi -$ соэффициент мощности.

$$\phi = \arg(R + i(\omega L - \frac{1}{\omega c})); \Rightarrow \cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2}}.$$

Если $(\omega L - \frac{1}{\omega c})^2 >> R^2$, то $\cos\phi << 1$.

Зависимость средней мощности переменного тока поглощаемой в контуре от частоты имеет резонансный вид.

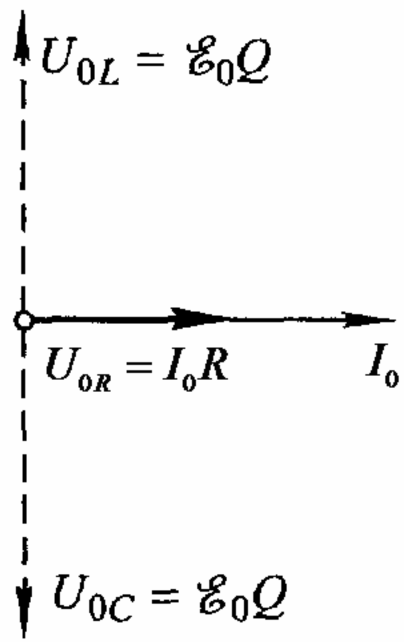
$$<P> = I_0^{\,2} R / 2$$



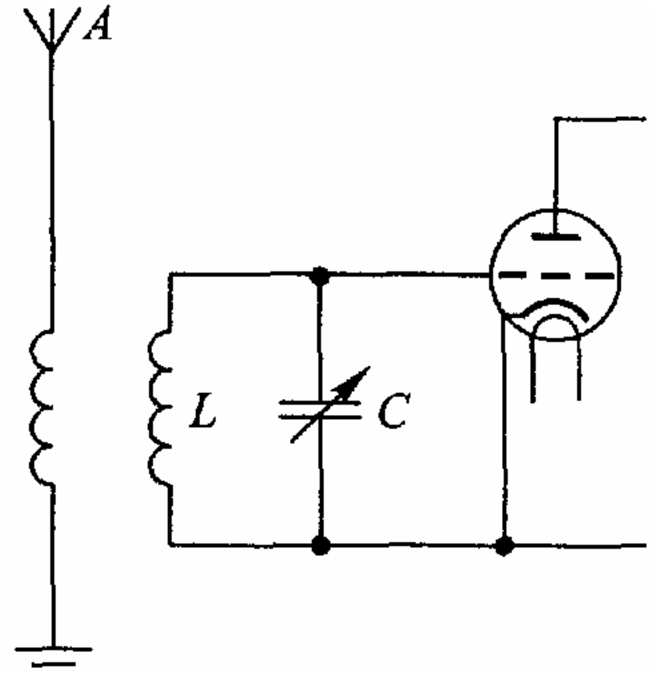
Active Figure 33.19 (a) The rms current versus frequency for a series *RLC* circuit, for three values of *R*. The current reaches its maximum value at the resonance frequency ω_0. (b) Average power delivered to the circuit versus frequency for the series *RLC* circuit, for two values of *R*.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Применение резонанса напряжений в радиотехнике.

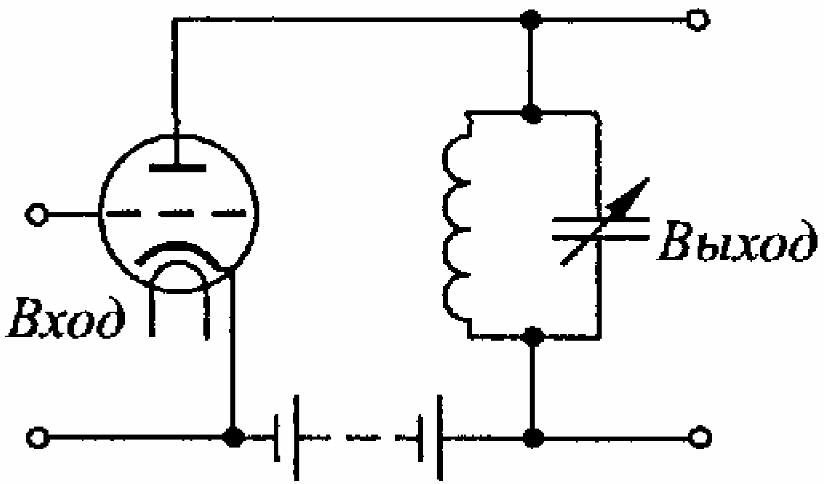


Векторная диаграмма напряжений при резонансе



Входной контур радиоприемника (схематически)

Применение резонанса токов.



Резонансный усилитель

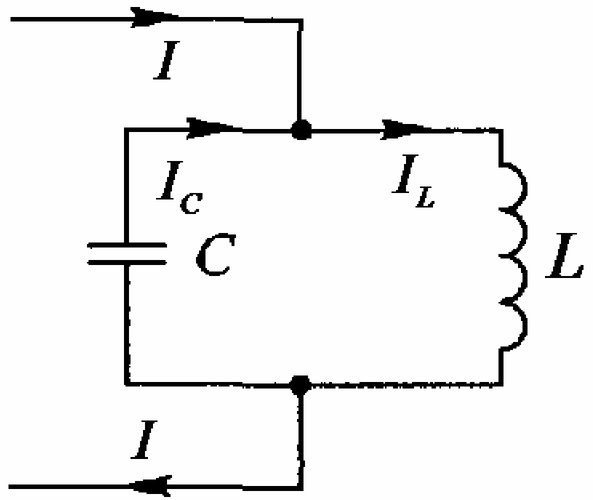


Схема нагревающего контура индукционной цепи