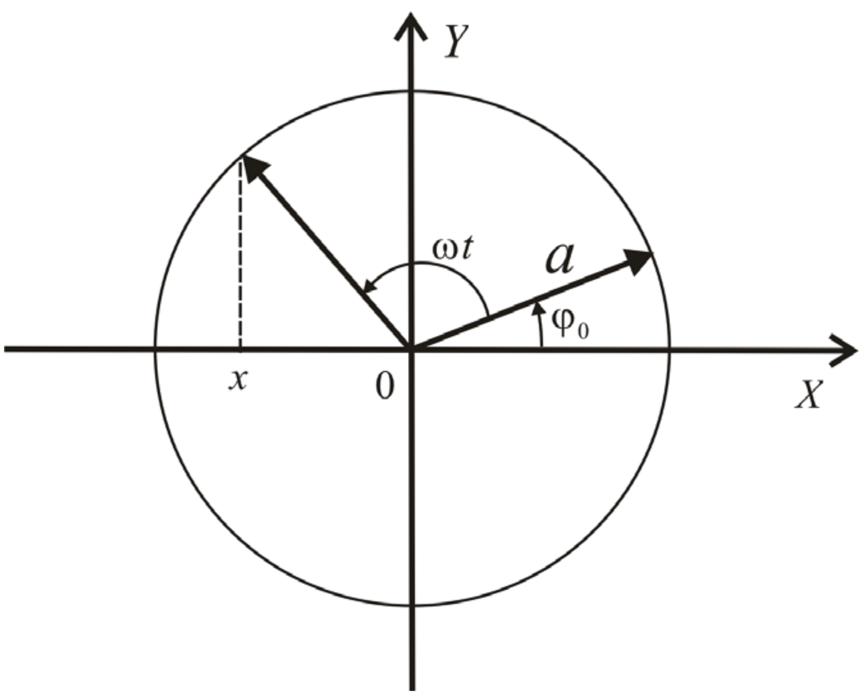
Лекция 18.

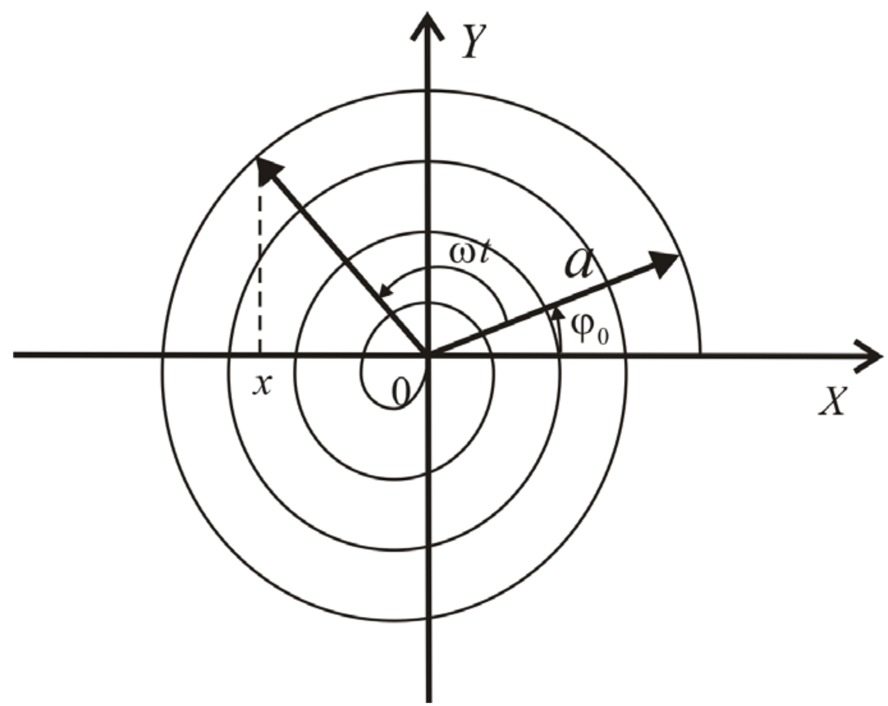
- Вынужденные колебания в контуре. Процесс установления вынужденных колебаний. Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления. Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока. Метод векторных диаграмм и метод комплексных амплитуд.

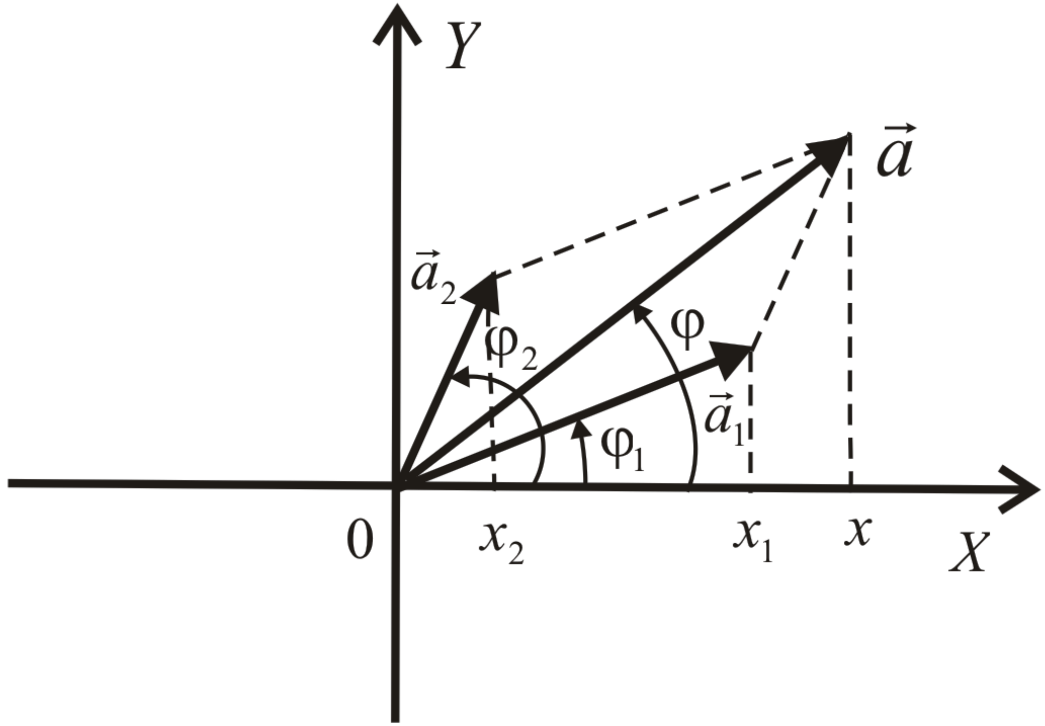
Метод векторных диаграмм.

$$x = a\cos(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\varphi}).$$

$$x = \underbrace{a_0 e^{-\gamma t}}_{a}\cos(\omega t + \varphi_0).$$







$$x_1 = a_1 \cos(\varphi_1), \quad \text{где} \quad \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{1,0};$$

$$x_2 = a_2 \cos(\varphi_2), \quad \text{где} \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{2,0};$$

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\varphi).$$

метод комплексных амплитуд.

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi},\ \text{где}\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2};\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \Rightarrow z = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi.$$

Имеем

$$x = a\cos(\omega t + \varphi_0) = \mathrm{Re}[ae^{i(\omega t + \varphi_0)}].$$

$$z = ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = a\cos(\omega t + \varphi_0) + ia\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$z = ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = z = ae^{i\varphi_0}e^{i\omega t} = z_0 e^{i\omega t},$$

где $z_0 = ae^{i\varphi_0}$ - комлексная амплитуда.

Комплексная частота.

Пусть $\omega = \omega' + i\omega''$, тогда

$$z = z_0 e^{i\omega t} = z_0 e^{i(\omega' + i\omega'')t} = z_0 e^{-\omega'' t} \cdot e^{i\omega' t},$$

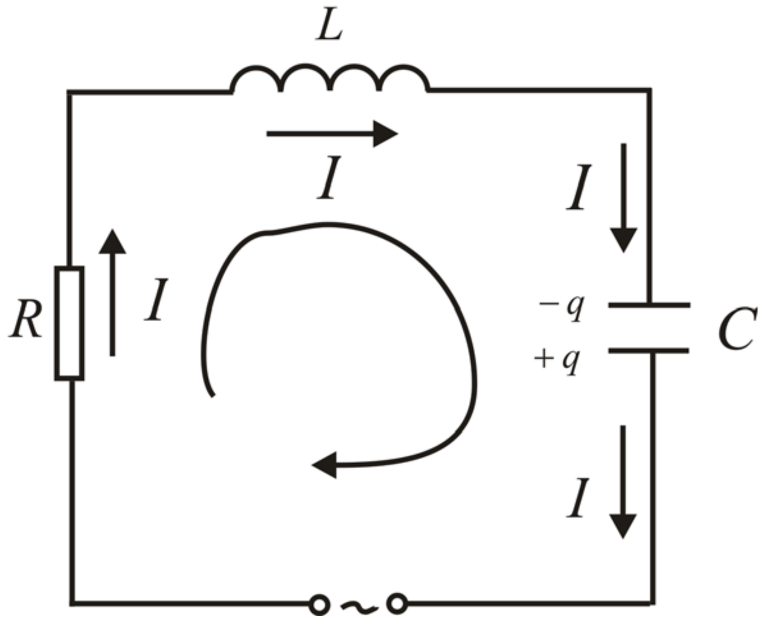
где $z_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$ – комплексная амлитуда.

Если $\operatorname{Im}\omega = \omega'' = \gamma$ - декремент затухания,

то $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}[a_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega' t + \varphi_0)}] =$

$a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi_0) -$ затухающие колебания.

Вынужденные колебания в контуре.



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos\omega t$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}_0 \cos\omega t.$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\gamma}\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{Lc}}_{\omega_0^2}q = \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0}{L}}_{x_0}\cos\omega t,$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \cos\omega t.$$

$$q = q_{общ.\,одн.} + q_{частн.\,неодн.}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0; \Rightarrow q_{общ.\,одн.} = a_0 e^{-\gamma t}\cos(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1}\cdot t + \varphi_0).$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения вынужденных колебаний воспользуемся комплексным представлением гармонической функции.

$$\ddot{q}_к + 2\gamma \dot{q}_к + \omega_0^2 q_к = x_0 e^{i\omega t},$$

$$q_к = z_0 e^{i\omega t}; \Rightarrow (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) z_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t};$$

$$z_0 = z_0(\omega) = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}; \Rightarrow q_к = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}.$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}; \Rightarrow q_к = \frac{x_0}{\rho} e^{i(\omega t - \varphi)}; q = \operatorname{Re} q_к = \frac{x_0}{\rho}\cos(\omega t - \varphi).$$

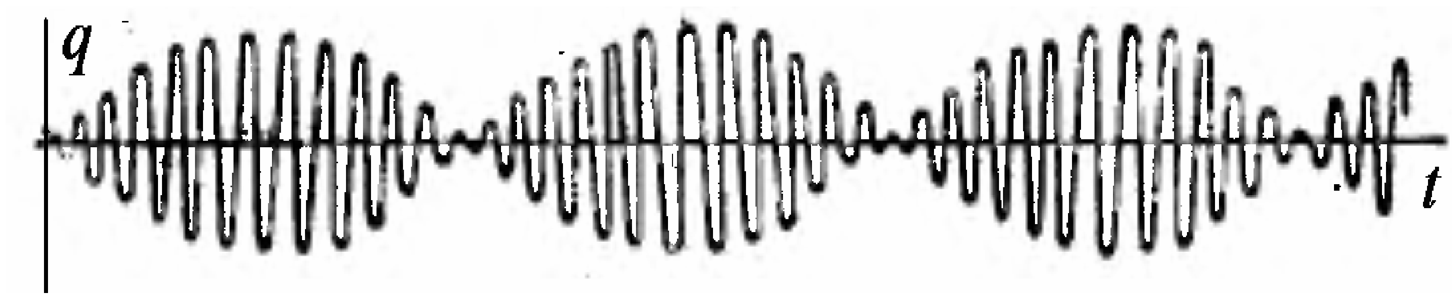
Общее решение равно

$$q = a_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{x_0}{\rho}\cos(\omega t - \varphi).$$

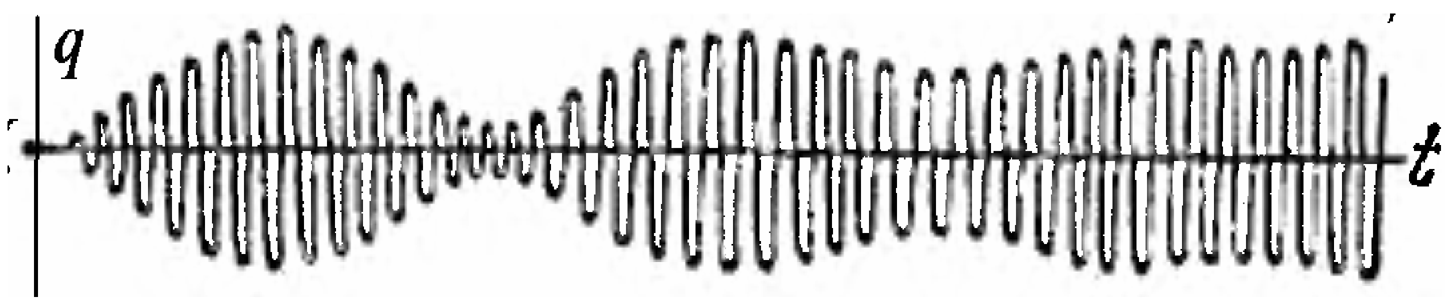
Структуру этого решения легко понять с помощью метода векторных диаграм.

В частности, если при $t = 0$ величины $q = 0,\ \dot{q} = 0,$ то

Если γ=0 и $\omega_1 \sim \omega$



Если $\gamma \neq 0$



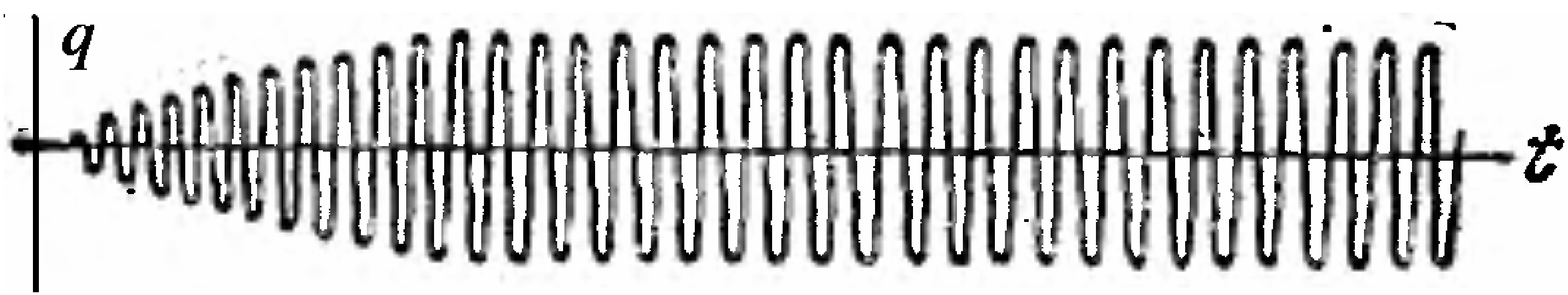
Процесс установления вынужденных колебаний при резонансе.

Пусть при $t = 0,\ q = 0,\ \dot{q} = I = 0,$ тогда

$$\begin{cases} a_0 \cos\varphi_0 + \dfrac{x_0}{\rho}\cos\varphi = 0, \\ -a_0\omega_1 \sin\varphi_0 - \gamma a_0 \cos\varphi_0 + \dfrac{x_0}{\rho}\omega \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Если $\gamma << \omega_0$ и $\omega = \omega_0$, то $\varphi_0 = -\varphi,\ a_0 = -x_0 / \rho.$

$$q \cong \frac{x_0}{\rho}(1 - e^{-\gamma t})\cos(\omega t - \varphi); \quad t >> \tau = 1/\gamma.$$



Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления.

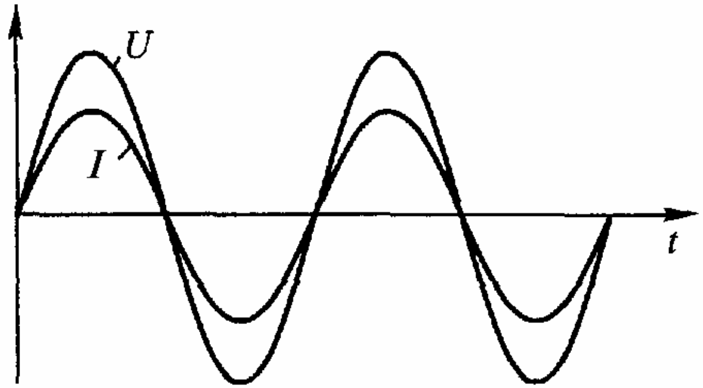
$$\text{При } t >> \tau, \quad q = \frac{x_0}{\rho}\cos(\omega t - \varphi), \Rightarrow$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \underbrace{\frac{\omega x_0}{\rho}}_{I_0}\sin(\omega t - \underbrace{(\varphi - \frac{\pi}{2})}_{\phi} + \frac{\pi}{2}) = I_0\cos(\omega t - \phi);$$

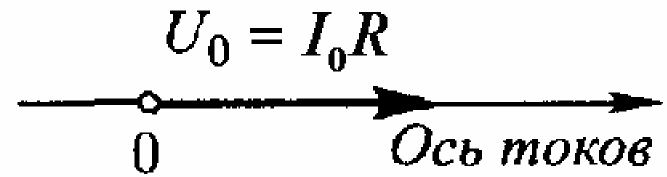
$$U_c = \frac{q}{c} = \frac{x_0}{c\rho}\cos(\omega t - \varphi) = \underbrace{\frac{1}{\omega c}I_0}_{U_{c,0}}\cos(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2});$$

$$U_L = -L\frac{dI}{dt} = -LI_0\omega\sin(\omega t - \phi) = \underbrace{\omega LI_0}_{U_{L,0}}\cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2});$$

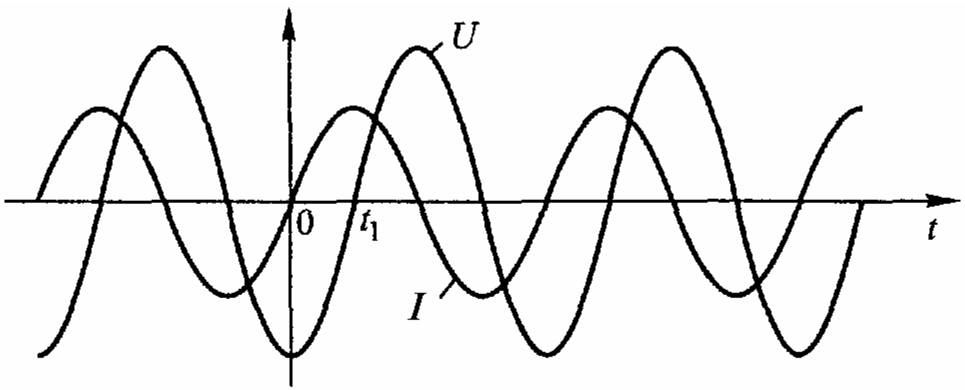
$$U_R = IR = \underbrace{I_0 R}_{U_{R,0}} \cos(\omega t - \phi);$$



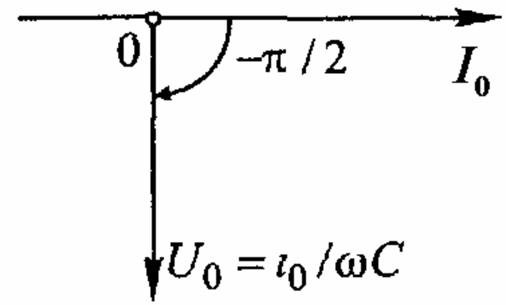
Колебания тока и напряжения на сопротивлении



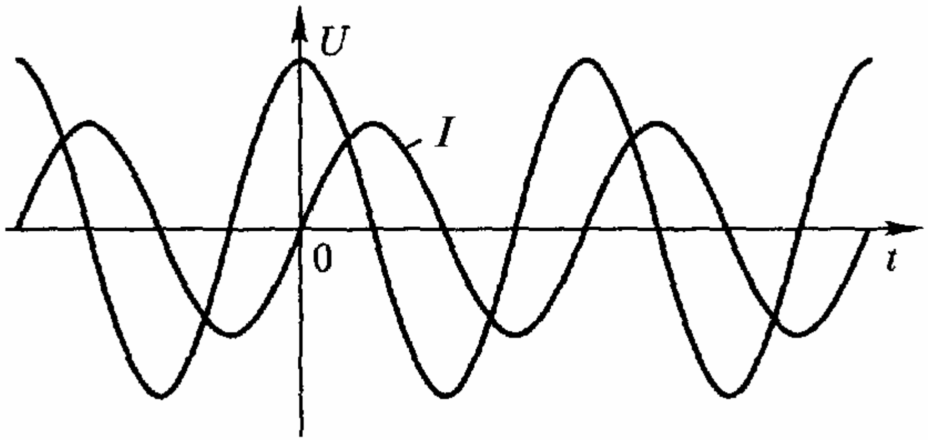
Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении



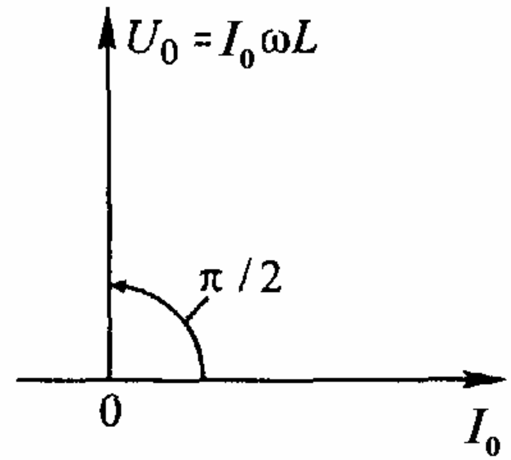
Колебания тока в цепи напряжения на конденсаторе



Векторная диаграмма напряжения на конденсаторе



Колебания тока и напряжения на индуктивности



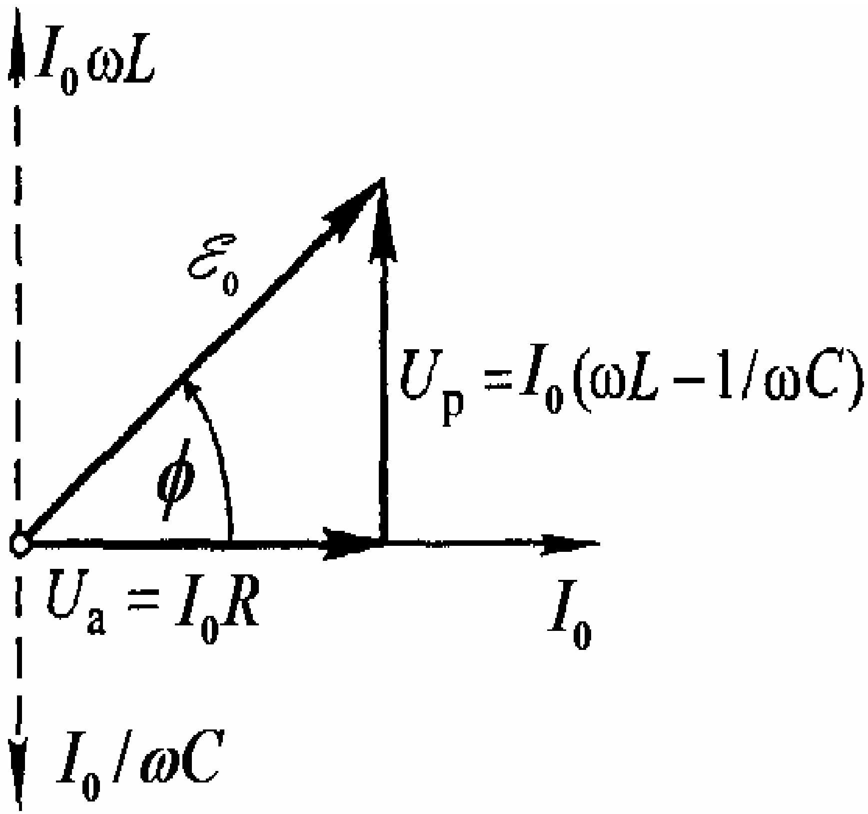
Векторная диаграмма напряжения на индуктивности

$R -$ активное сопротивление,

$R_c = \dfrac{1}{\omega c} -$ емкостное сопротивление,

$R_L = \omega L -$ индуктивное сопротивление.

Векторная диаграмма напряжений для последовательного соединения сопротивления, емкости и индуктивности.



R – активное сопр.,

$\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)$ – реактивное сопр.

$$\mathcal{E}_0 = U_0 = I_0 \overbrace{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2}}^{R_{эфф}},$$

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока.

$$q_\kappa = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}; \Rightarrow I_\kappa = \frac{dq_\kappa}{dt} = \frac{i\omega \cdot x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t};$$

$$I_\kappa = \frac{i\omega \cdot (\mathcal{E}_0 / L)}{\frac{1}{Lc} - \omega^2 + i2\frac{R}{2L}\omega} e^{i\omega t} = \frac{i\omega \cdot (\mathcal{E}_0 / L)}{\frac{1}{Lc} - \omega^2 + i2\frac{R}{2L}\omega} e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{\underbrace{\frac{1}{i\omega c}}_{Z_c} + \underbrace{i\omega L}_{Z_L} + R} = \frac{\mathcal{E}_\kappa}{Z},$$ где $Z = \frac{1}{i\omega c} + i\omega L + R$ – комплексное сопротивление или импеданс.

$$I_\kappa = \frac{\mathcal{E}_\kappa}{Z} = \frac{\mathcal{E}_\kappa}{|Z| e^{i\phi}},$$ где $Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)$, $\mathrm{tg}\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}$.

Так как $\left|I_к\right| = I_0,\ \left|\mathcal{E}_к\right| = \mathcal{E}_0,\ \left|\mathrm{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}$

$$\left|I_к\right| = \frac{\left|\mathcal{E}_к\right|}{\left|Z\right|}; \Rightarrow \underbrace{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}}_{\text{закон Ома для переменного тока}}, \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

R – активное сопротивление,

$\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)$ – реактивное сопротивление.