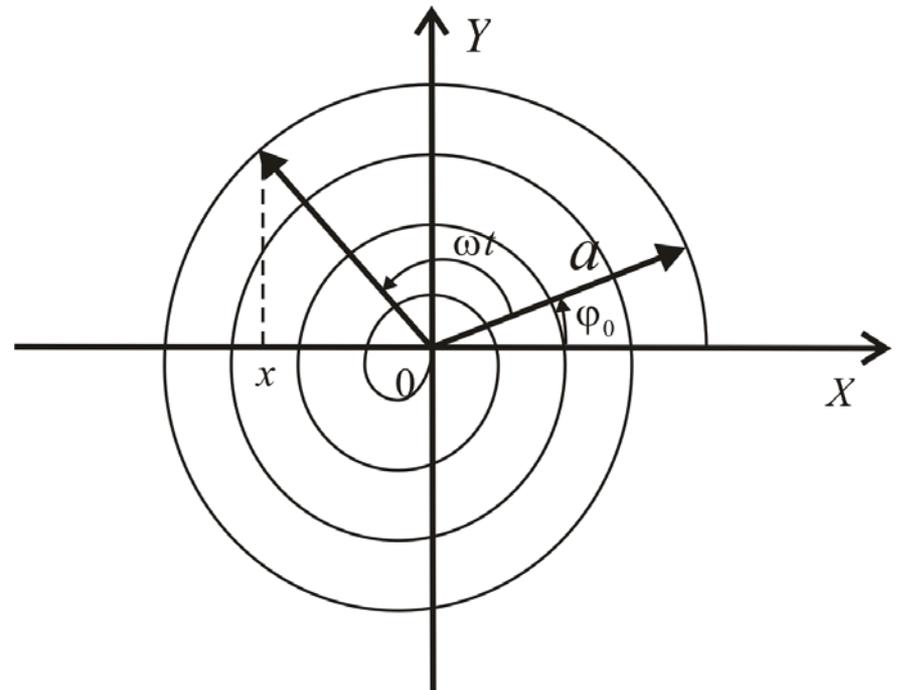
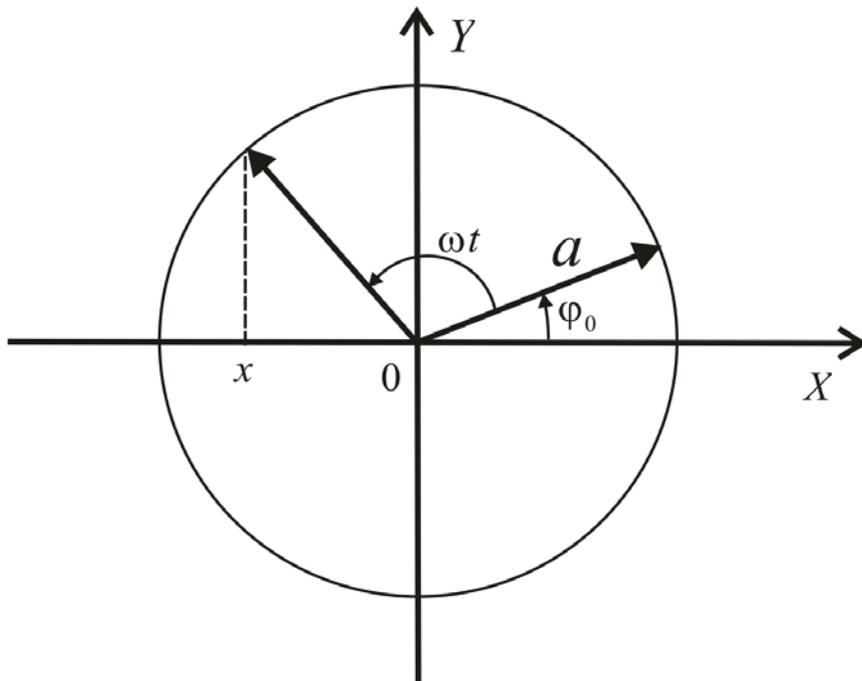


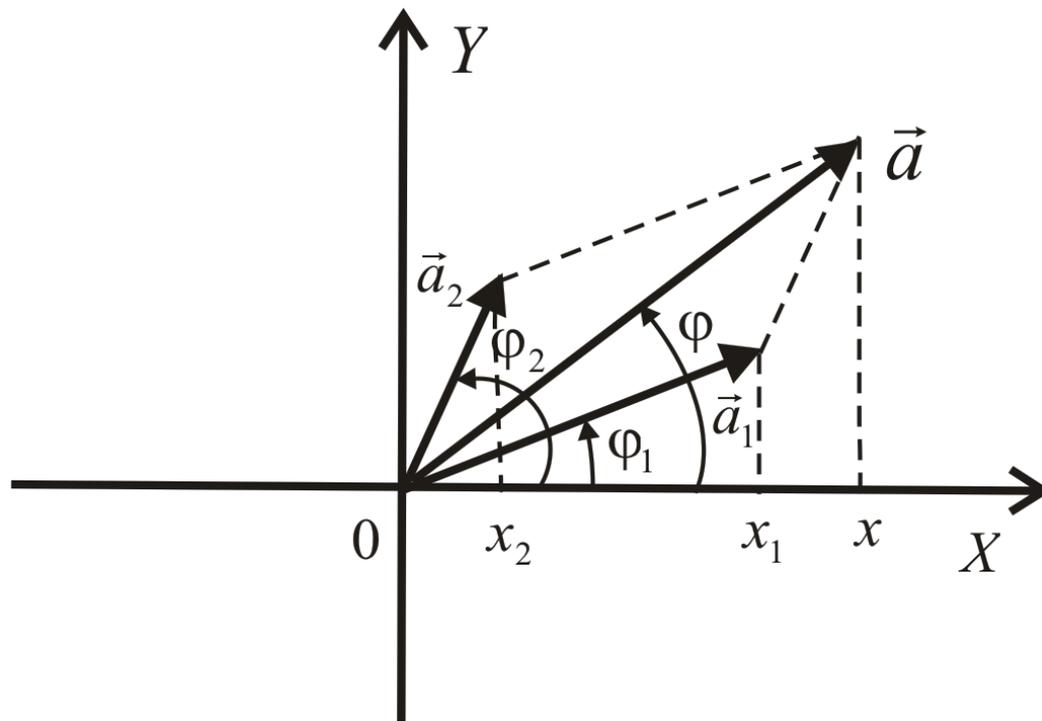
Лекция 18.

- Вынужденные колебания в контуре. Процесс установления вынужденных колебаний. Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления. Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока. Метод векторных диаграмм и метод комплексных амплитуд.

Метод векторных диаграмм.

$$x = a \cos(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\varphi}). \quad x = \underbrace{a_0 e^{-\gamma t}}_a \cos(\omega t + \varphi_0).$$





$$x_1 = a_1 \cos(\varphi_1), \quad \text{где } \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{1,0};$$

$$x_2 = a_2 \cos(\varphi_2), \quad \text{где } \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{2,0};$$

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\varphi).$$

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД.

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \Rightarrow z = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi.$$

Имеем

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[a e^{i(\omega t + \varphi_0)}].$$

$$z = a e^{i(\omega t + \varphi_0)} = a \cos(\omega t + \varphi_0) + ia \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$z = a e^{i(\omega t + \varphi_0)} = z = a e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = z_0 e^{i\omega t},$$

где $z_0 = a e^{i\varphi_0}$ - комплексная амплитуда.

Комплексная частота.

Пусть $\omega = \omega' + i\omega''$, тогда

$$z = z_0 e^{i\omega t} = z_0 e^{i(\omega' + i\omega'')t} = z_0 e^{-\omega''t} \cdot e^{i\omega't},$$

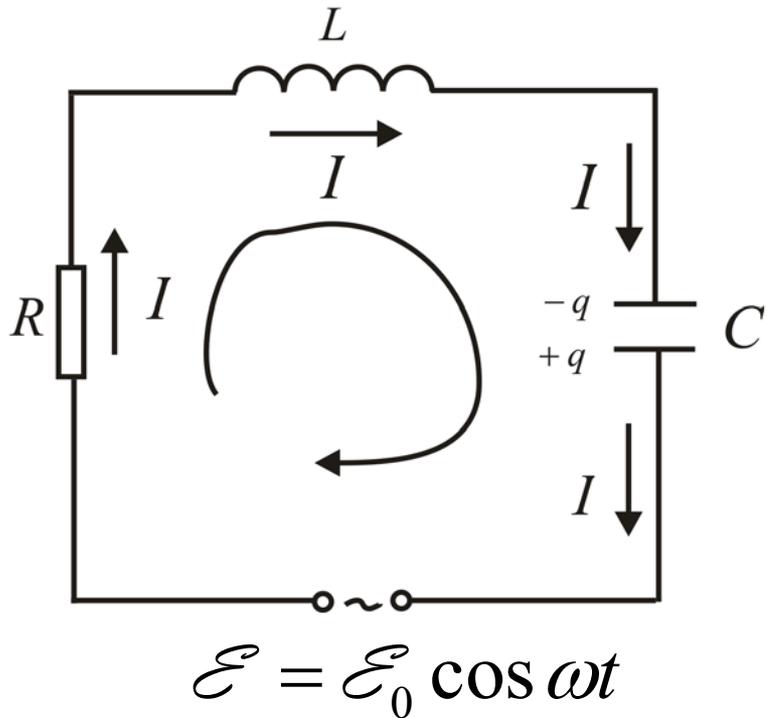
где $z_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$ – комплексная амплитуда.

Если $\text{Im } \omega = \omega'' = \gamma$ – декремент затухания,

$$\text{то } x = \text{Re } z = \text{Re}[a_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega't + \varphi_0)}] =$$

$a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega't + \varphi_0)$ – затухающие колебания.

Вынужденные колебания в контуре.



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \underbrace{\frac{R}{2L}}_{\gamma} \frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0}{L}}_{x_0} \cos \omega t,$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \cos \omega t.$$

$$q = q_{\text{общ. одн.}} + q_{\text{частн. неодн.}}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0; \Rightarrow q_{\text{общ. одн.}} = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1} \cdot t + \varphi_0).$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения вынужденных колебаний воспользуемся комплексным представлением гармонической функции.

$$\ddot{q}_K + 2\gamma\dot{q}_K + \omega_0^2 q_K = x_0 e^{i\omega t},$$

$$q_K = z_0 e^{i\omega t}; \Rightarrow (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) z_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t};$$

$$z_0 = z_0(\omega) = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}; \Rightarrow q_K = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}.$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}; \Rightarrow q_K = \frac{x_0}{\rho} e^{i(\omega t - \varphi)}; q = \operatorname{Re} q_K = \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi).$$

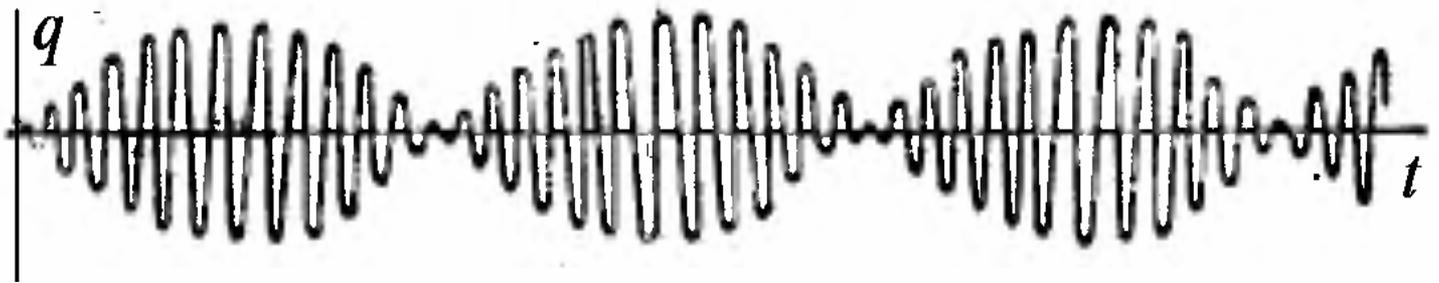
Общее решение равно

$$q = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi).$$

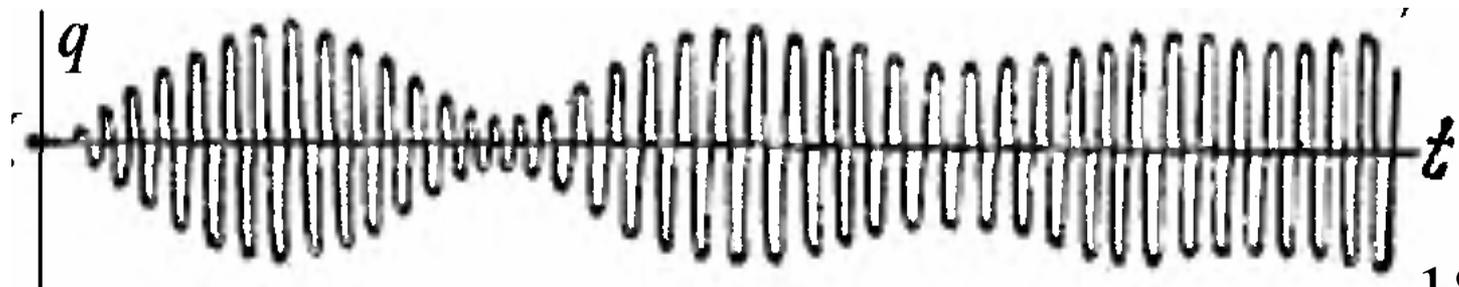
Структуру этого решения легко понять с помощью метода векторных диаграмм.

В частности, если при $t = 0$ величины $q = 0$, $\dot{q} = 0$, то

Если $\gamma = 0$
и $\omega_1 \sim \omega$



Если $\gamma \neq 0$



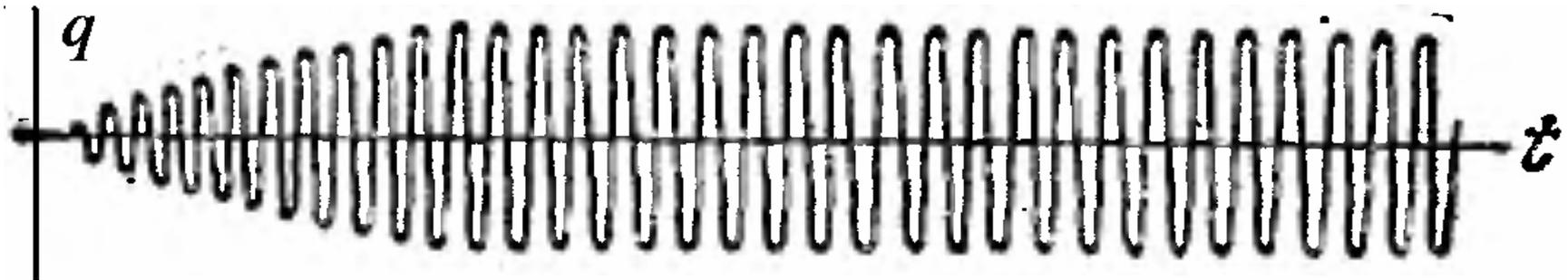
Процесс установления вынужденных колебаний при резонансе.

Пусть при $t = 0$, $q = 0$, $\dot{q} = I = 0$, тогда

$$\begin{cases} a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\rho} \cos \varphi = 0, \\ -a_0 \omega_1 \sin \varphi_0 - \gamma a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\rho} \omega \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Если $\gamma \ll \omega_0$ и $\omega = \omega_0$, то $\varphi_0 = -\varphi$, $a_0 = -x_0 / \rho$.

$$q \cong \frac{x_0}{\rho} (1 - e^{-\gamma t}) \cos(\omega t - \varphi); \quad t \gg \tau = 1 / \gamma.$$



Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления.

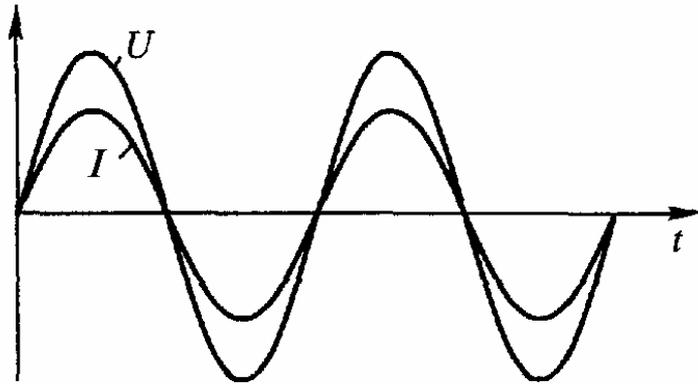
$$\text{При } t \gg \tau, \quad q = \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi), \Rightarrow$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega x_0}{\underbrace{\rho}_{I_0}} \sin(\omega t - \underbrace{(\varphi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}}_{\phi}) = I_0 \cos(\omega t - \phi);$$

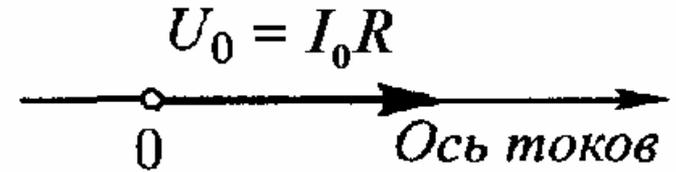
$$U_c = \frac{q}{c} = \frac{x_0}{c\rho} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{\underbrace{\omega c}_{U_{c,0}}} I_0 \cos(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2});$$

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \omega \sin(\omega t - \phi) = \underbrace{\omega LI_0}_{U_{L,0}} \cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2});$$

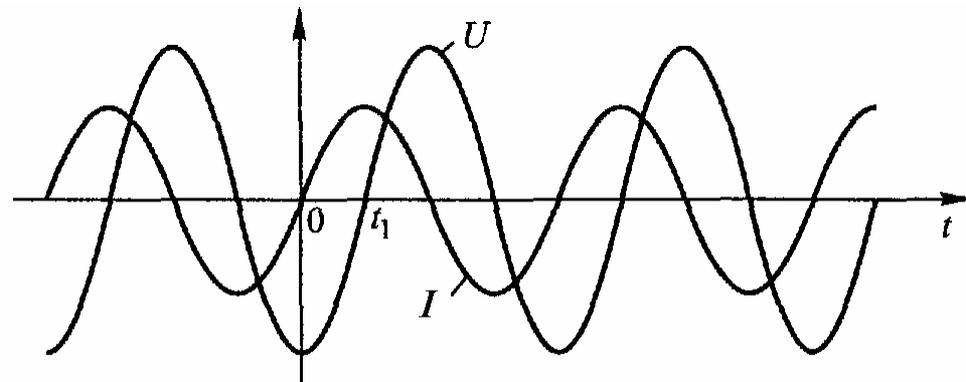
$$U_R = IR = \underbrace{I_0 R}_{U_{R,0}} \cos(\omega t - \phi);$$



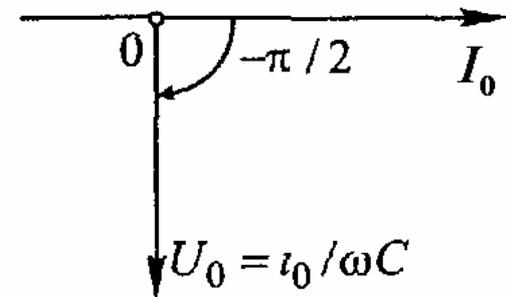
Колебания тока и напряжения на сопротивлении



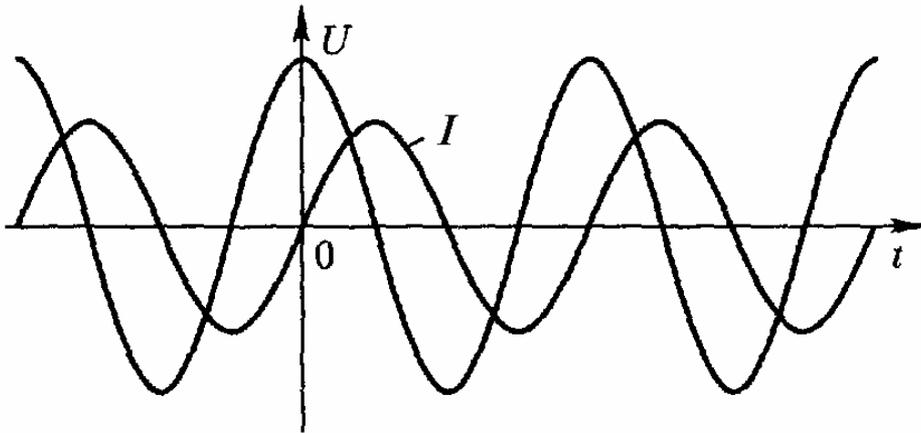
Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении



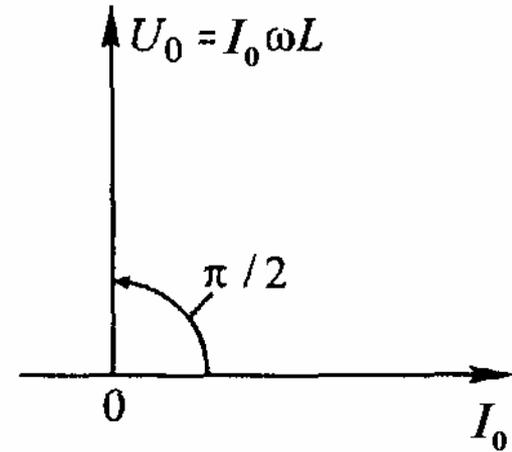
Колебания тока в цепи напряжения на конденсаторе



Векторная диаграмма напряжения на конденсаторе



Колебания тока и напряжения на индуктивности



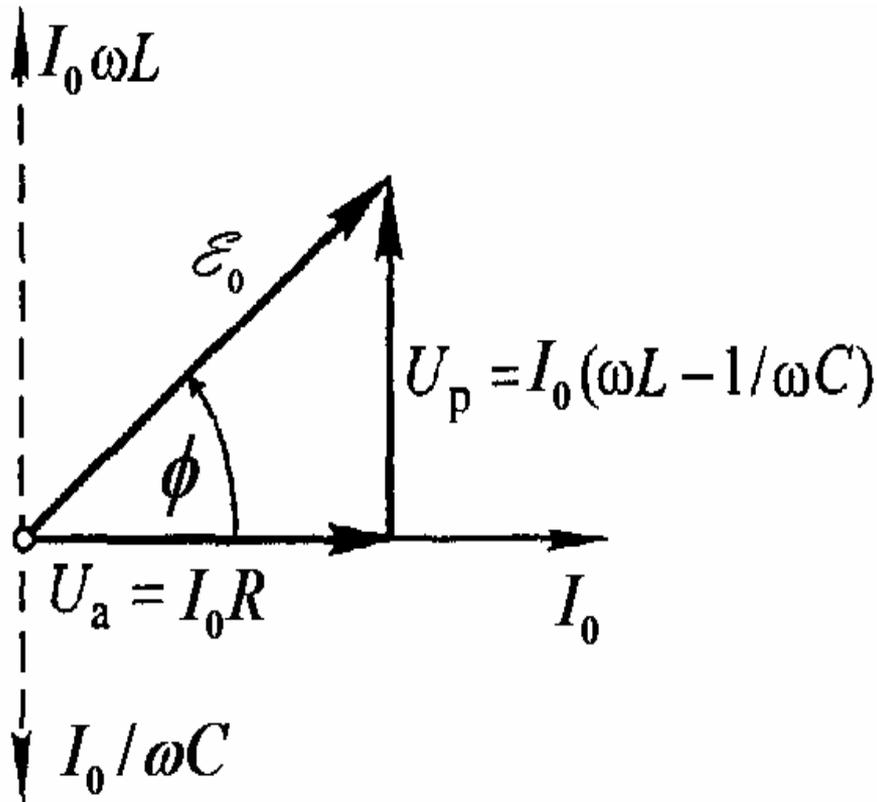
Векторная диаграмма напряжения на индуктивности

R – активное сопротивление,

$R_c = \frac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление,

$R_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление.

Векторная диаграмма напряжений
 для последовательного соединения
 сопротивления, емкости и индуктивности.



R – активное сопр.,

$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ – реактивное сопр.

$$E_0 = U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \overbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}^{R_{эфф}}},$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока.

$$q_{\kappa} = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}; \Rightarrow I_{\kappa} = \frac{dq_{\kappa}}{dt} = \frac{i\omega \cdot x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t};$$

$$I_{\kappa} = \frac{i\omega \cdot (\mathcal{E}_0 / L)}{\frac{1}{Lc} - \omega^2 + i2\frac{R}{2L}\omega} e^{i\omega t} = \frac{i\omega \cdot (\mathcal{E}_0 / L)}{\frac{1}{Lc} - \omega^2 + i2\frac{R}{2L}\omega} e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{\underbrace{\frac{1}{i\omega c}}_{Z_c} + \underbrace{i\omega L}_{Z_L} + R} = \frac{\mathcal{E}_{\kappa}}{Z}, \text{ где } Z = \frac{1}{i\omega c} + i\omega L + R -$$

- комплексное сопротивление
или импеданс.

$$I_{\kappa} = \frac{\mathcal{E}_{\kappa}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{\kappa}}{|Z| e^{i\phi}}, \text{ где } Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega c} \right), \quad \text{tg } \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}. \quad 18.14$$

Так как $|I_K| = I_0$, $|\mathcal{E}_K| = \mathcal{E}_0$, $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

$$|I_K| = \frac{|\mathcal{E}_K|}{|Z|}; \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{\text{закон Ома для переменного тока}}}, \quad \text{tg } \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

R – активное сопротивление,

$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ – реактивное сопротивление.