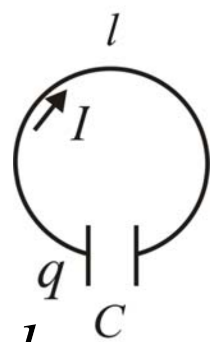
Лекция 17.

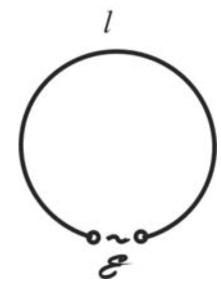
- Квазистационарные поля. Критерий квазистационарности. Переходные процессы в RC- и RL-цепях.
- Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.
- Энергия гармонических колебаний. Затухающие колебания в контуре и их уравнение. Показатель затухания. Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.
- Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.

Квазистационарные поля. Критерий квазистационарности.

- **В квазистационарном приближении** полагается, что в рассматриваемой электродинамической системе все распределенные в пространстве заряды, токи и поля изменяются синхронно и мгновенно. То есть в каждый момент времени нестационарные заряды и токи порождают электрическое и магнитное поле соответствующее эквивалентным стационарным зарядам и токам.

Критерий квазисационарности.





$$\tau \sim \frac{l}{c}; \Rightarrow \tau << T.\ Tc = \lambda -$$

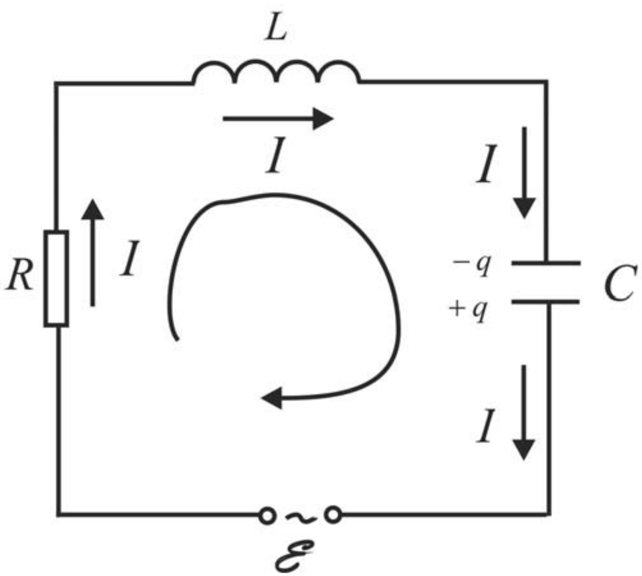
излучаемой волны. $\Rightarrow\ l << \lambda.$

Если $l = 1км = 10^3 м$, то $\tau = \dfrac{10^3 м}{3 \cdot 10^8 м/с} = \dfrac{1}{3} 10^{-5} с.\ \nu = \dfrac{1}{T} << 10^5 Гц = 100кГц.$

Если $l = 100м$, то $\tau = \dfrac{10^2 м}{3 \cdot 10^8 м/с} = \dfrac{1}{3} 10^{-6} с.\ \nu = \dfrac{1}{T} << 10^6 Гц = 1МГц.$

Микропроцессор $l = 1см. \Rightarrow \nu_0 = 1/\tau = c/l \sim 10ГГц.$ Близок к пределу квазистационарности

Уравнение колебательного контура в квазистационарном приближении.



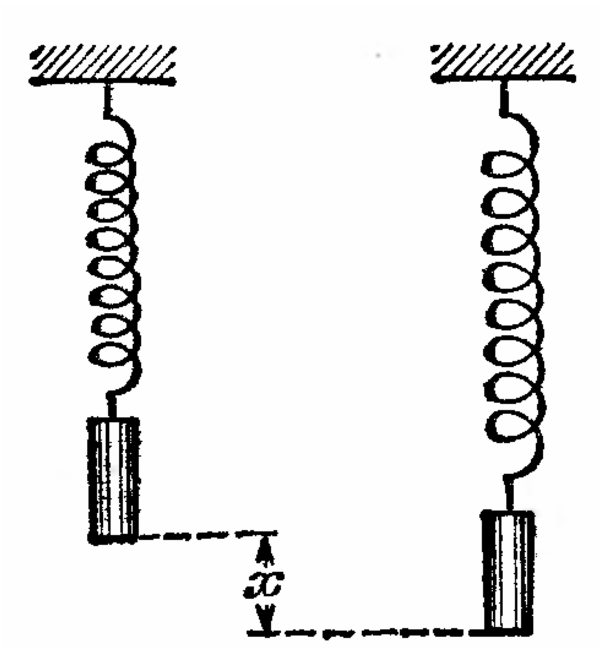
Пусть q – заряд первой пластины конденсатора, встречающейся при положительном обходе контура. Тогда напряжение $U_c = q/c$ и ток в контуре $I = dq/dt$ будут иметь правилный знак.

Согласно правилу Кирхгофа, имеем

$$IR + \underbrace{U_c}_{q/c} = \underbrace{\mathcal{E}^{\text{самоинд.}}}_{-LdI/dt} + \mathcal{E},$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}.$$

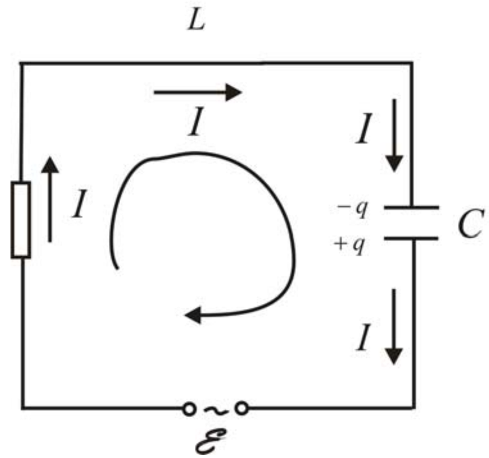
Механическая аналогия



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu v_x + F,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = F.$$

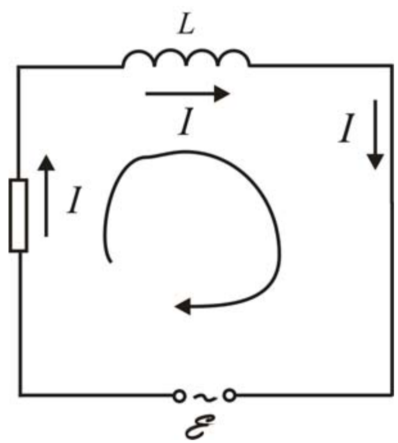
Переходные процессы в RC- и RL-цепях.



$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=\mathscr{E},\Rightarrow Rc\frac{dq}{dt}=c\mathscr{E}-q,\Rightarrow \frac{dq}{c\mathscr{E}-q}=\frac{dt}{Rc}.$$

$$\ln\left|c\mathscr{E}-q\right|=-\frac{t}{Rc}+const.\ \text{При}\ t=0\ const=\ln\left|c\mathscr{E}\right|,$$

$$c\mathscr{E}-q=c\mathscr{E}\cdot e^{-\frac{t}{Rc}};\Rightarrow q=c\mathscr{E}(1-e^{-\frac{t}{Rc}}).$$

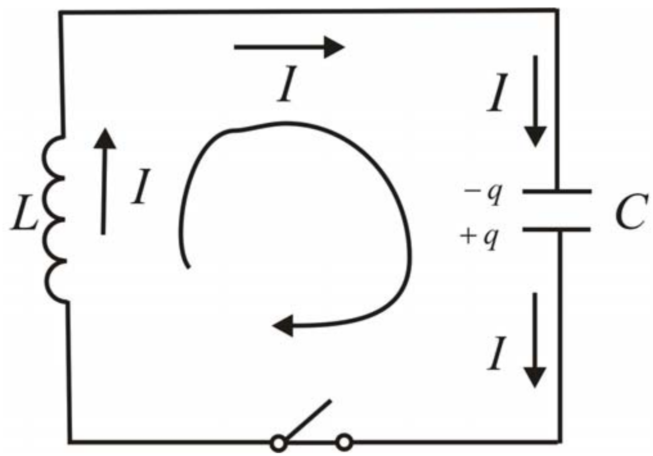


$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}=\mathscr{E};\Rightarrow L\frac{dI}{dt}+RI=\mathscr{E};$$

$$c\to\frac{1}{R};\quad R\to L;\quad q\to I.$$

$$I=\frac{1}{R}\mathscr{E}(1-e^{-\frac{Rt}{L}}).$$

Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.



$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{c}=0;\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{\underbrace{Lc}_{\omega_0^2}}q=0.$$

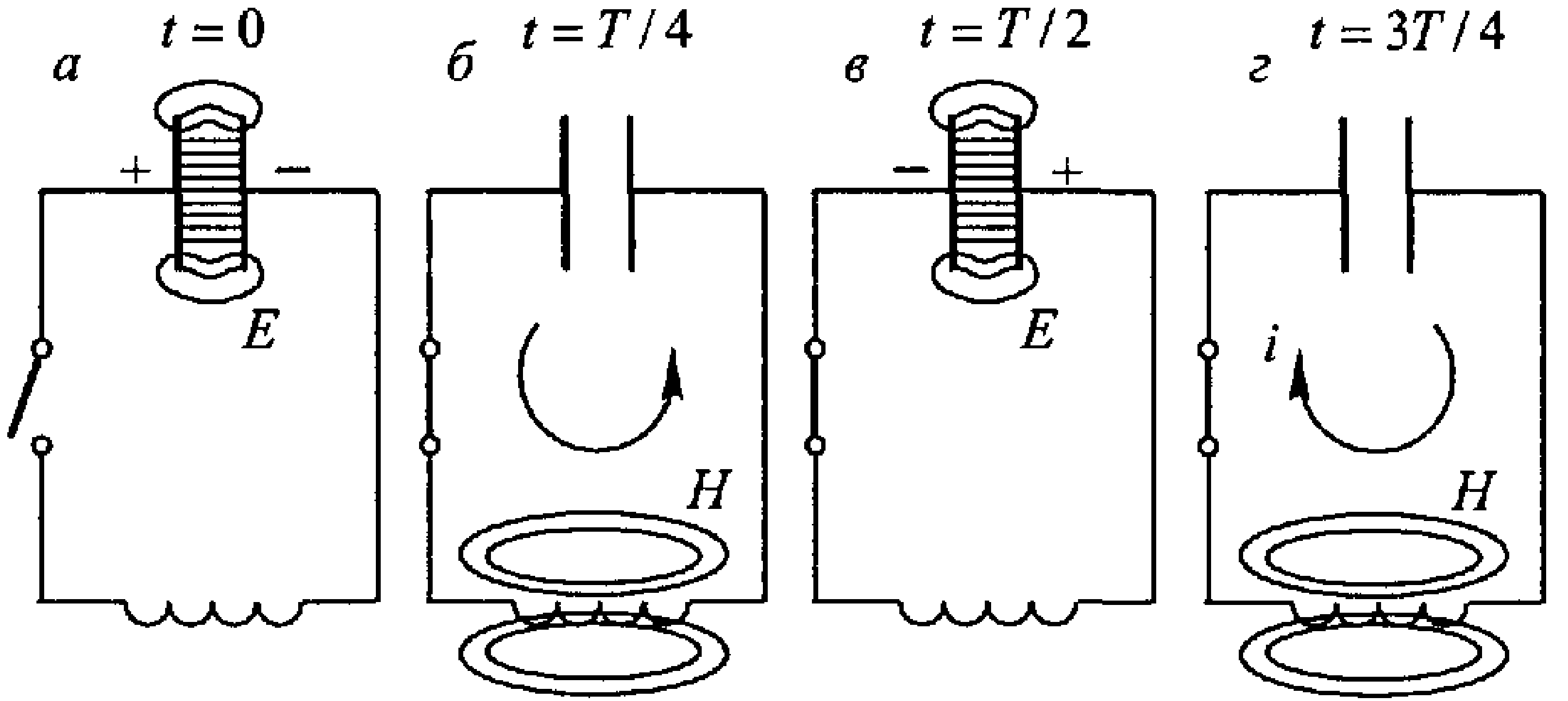
$$\ddot{q}+\omega_0^2q=0,\ \text{где}\ \ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{Lc}}.$$

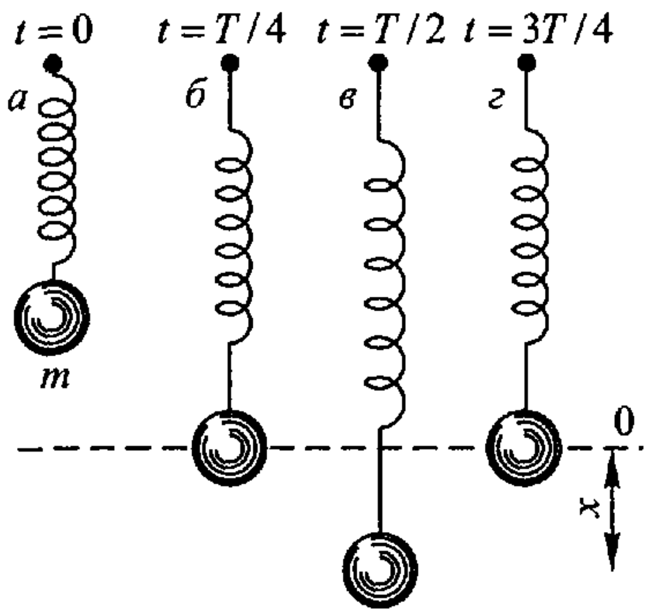
$$q=A\sin\omega_0t+B\cos\omega_0t=a\cos(\omega_0t+\varphi_0), I=\dot{q}=-a\omega_0\sin(\omega_0t+\varphi_0),$$

где $a=\sqrt{A^2+B^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0=-\dfrac{A}{B}$. Начальные условия: при $t=0,\ q_0, I_0.$

В частности, если при $t=0, q=q_0, I=I_0=0,$ то $A=0, B=q_0;\Rightarrow$

$$q=q_0\cos\omega_0t,\quad I=-\omega_0q_0\sin\omega_0t.\qquad W_c=\frac{q^2}{2c},\quad W_I=W_L=\frac{LI^2}{2}.$$





$$q = q_0 \cos \omega_0 t,$$

$$I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t.$$

$$x = x_0 \cos \omega_0 t,$$

$$v_x = \dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t.$$

Энергия гармонических колебаний.

$$I\cdot\left|L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{c}=0,\Rightarrow L\frac{d}{dt}\frac{I^2}{2}+\frac{dq}{dt}\frac{q}{c}=0,\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L}+\underbrace{\frac{q^2}{2c}}_{W_c}\right)=0.\Rightarrow\right.$$

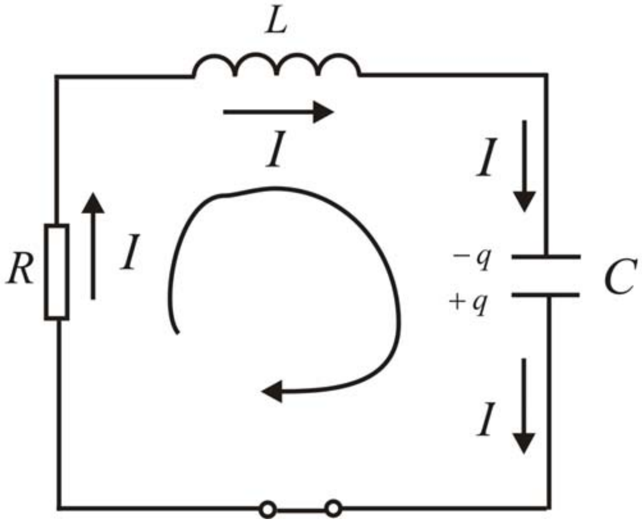
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L}+\underbrace{\frac{q^2}{2c}}_{W_c}=const.$$

$$W_L=\frac{LI^2}{2}=\frac{L}{2}a^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)=\frac{a^2}{2c}\frac{1}{2}(1-\cos[2(\omega_0 t+\varphi_0)])$$

$$W_c=\frac{q^2}{2c}=\frac{a^2}{2c}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)=\frac{a^2}{2c}\frac{1}{2}(1+\cos[2(\omega_0 t+\varphi_0)])$$

$$\langle W_{L,c}\rangle=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}W_{L,c}dt=\frac{a^2}{4c};\Rightarrow\langle W_L\rangle=\langle W_c\rangle.$$

Затухающие колебания в контуре и их уравнение.



$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=0;\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}+2\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\gamma}\frac{dq}{dt}+\underbrace{\frac{1}{Lc}}_{\omega_0^2}q=0.$$

$$\ddot{q}+2\gamma\dot{q}+\omega_0^2q=0,\quad q=\xi e^{-\gamma t}.$$

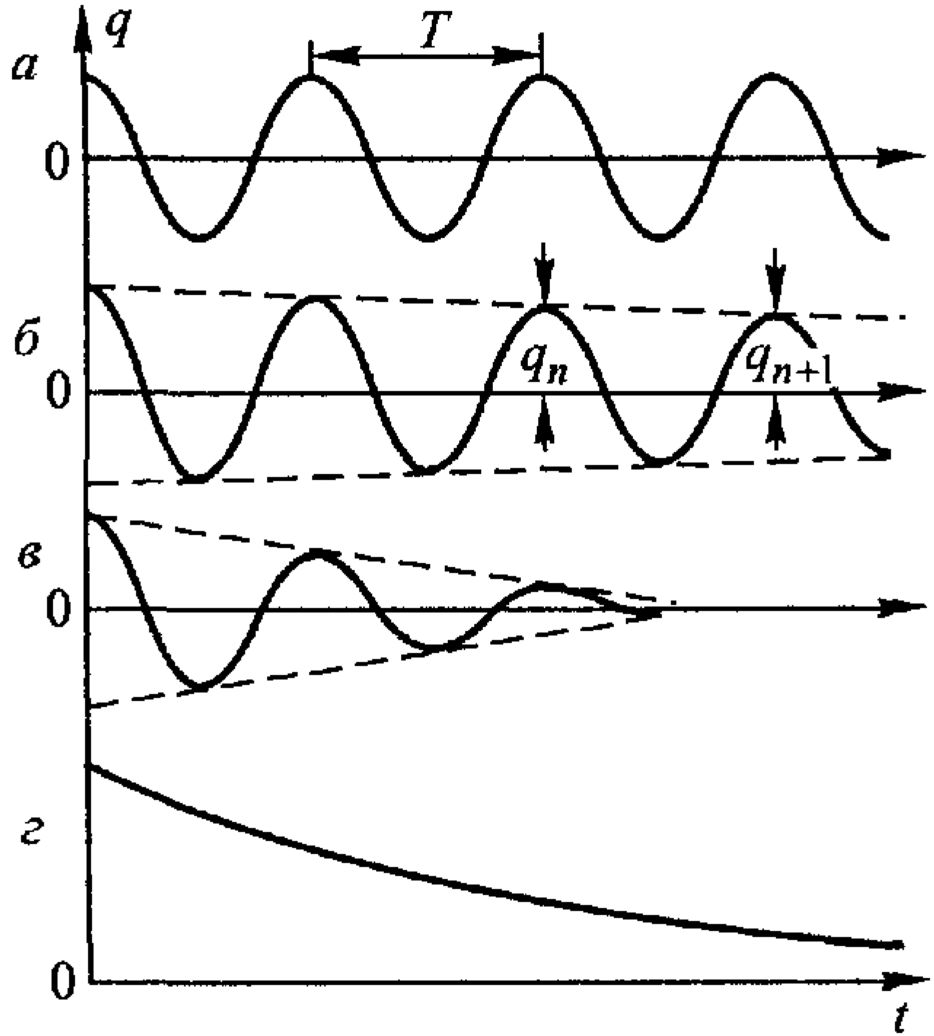
$$(q=uv,\dot{q}=\dot{u}v+u\dot{v},\ddot{q}=\ddot{u}v+2\dot{u}\dot{v}+u\ddot{v})$$

$$\ddot{\xi}e^{-\gamma t}-2\dot{\xi}\gamma e^{-\gamma t}+\gamma^2\xi e^{-\gamma t}+2\gamma\xi e^{-\gamma t}-2\gamma^2\xi e^{-\gamma t}+\omega_0^2\xi e^{-\gamma t}=0,$$

$\ddot{\xi}+(\omega_0^2-\gamma^2)\xi=0,$ если $\gamma<\omega_0,$ то $\ddot{\xi}+\omega_1^2\xi=0,$ где $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}.$

$$\xi=a_0\cos(\omega_1 t+\varphi_0);\Rightarrow q=a_0e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\varphi_0).$$

Если при $t=0, q=q_0, I=\dot{q}=0,$ то $\varphi_0=0,\quad a_0=q_0.$



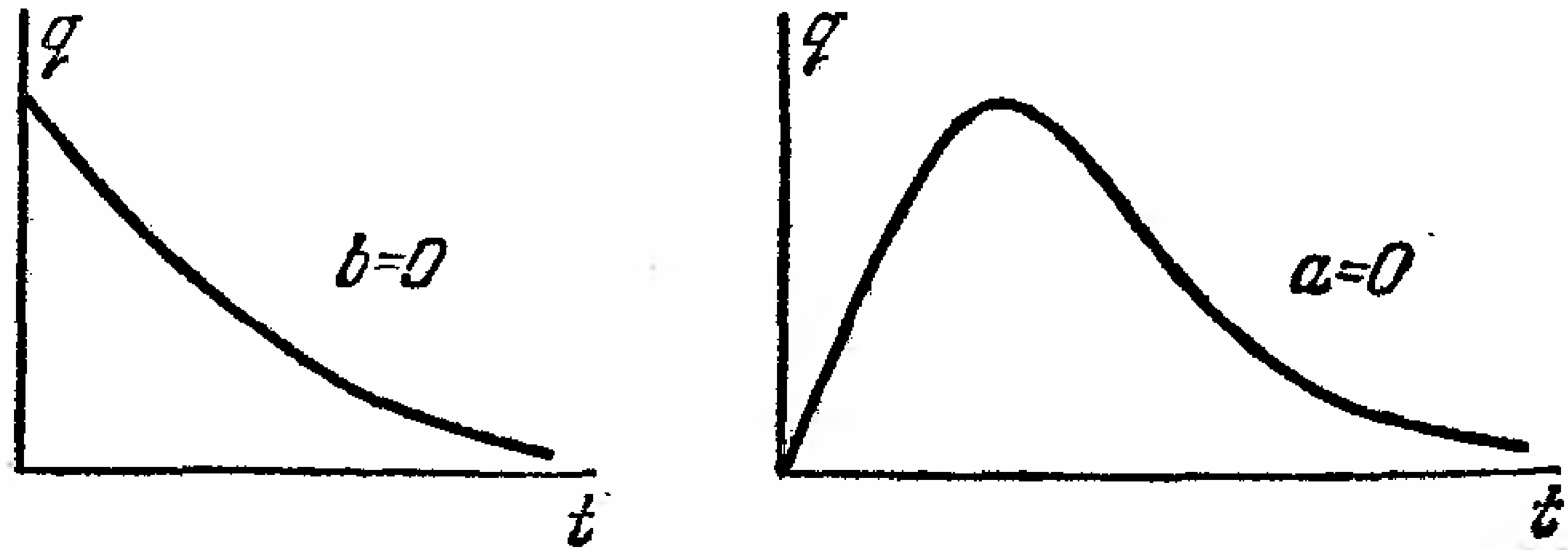
$$q = q_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t).$$

Если $\gamma > \omega_0$, то $\ddot{\xi} - (\gamma^2 - \omega_0^2)\xi = 0.$

$$\xi = Ae^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t} + Be^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t}, q = Ae^{-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})\cdot t} + Be^{-(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})\cdot t}.$$

Если $\gamma = \omega_0$, то $\ddot{\xi}=0$, $\xi=(a+b\cdot t)$,

$q=(a+b\cdot t)e^{-\gamma t}$.



Показатель затухания (декремент затухания). Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.

$a = a(t) = a_0 e^{-\gamma t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$\gamma = \dfrac{R}{2L}$ – декремент (показатель) затухания;

$\tau = \dfrac{1}{\gamma}$ – время релаксации, время за которое

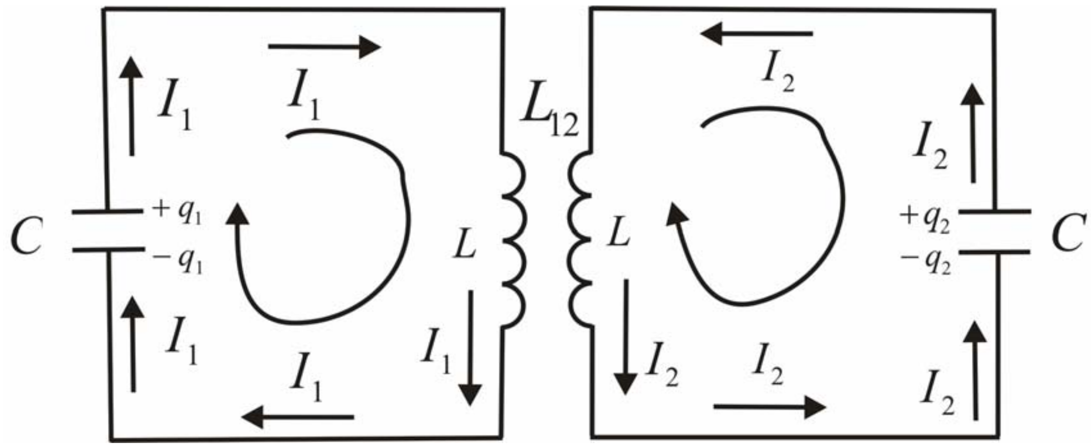
амплитуда колебаний уменьшиться в $e = 2,7$ раз.

$\theta = \ln \dfrac{a(t)}{a(t+T)} = \gamma T$ – логарифмический декремент

затухания.

$Q = \dfrac{\pi}{\theta}$ – добротность колебательного контура.

Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.



$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{c} = -L\dfrac{dI_1}{dt} - L_{12}\dfrac{dI_2}{dt}, \\ \dfrac{q_2}{c} = -L\dfrac{dI_2}{dt} - L_{12}\dfrac{dI_1}{dt}, \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} L\dfrac{d^2I_1}{dt^2} + L_{12}\dfrac{d^2I_2}{dt^2} + \dfrac{I_1}{c} = 0, \\ L\dfrac{d^2I_2}{dt^2} + L_{12}\dfrac{d^2I_1}{dt^2} + \dfrac{I_2}{c} = 0, \end{cases}\right| \pm \Rightarrow \begin{cases} (L+L_{12})\dfrac{d^2}{dt^2}(I_1+I_2) + \dfrac{1}{c}(I_1+I_2) = 0, \\ (L-L_{12})\dfrac{d^2}{dt^2}(I_1-I_2) + \dfrac{1}{c}(I_1-I_2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \underbrace{\dfrac{1}{(L + L_{12})c}}_{\omega_1^2}(I_1 + I_2) = 0, & I_1 + I_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^0), \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + \underbrace{\dfrac{1}{(L - L_{12})c}}_{\omega_2^2}(I_1 - I_2) = 0, & I_1 - I_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2^0). \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{a_1}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1^0) + \frac{a_2}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2^0),$$

$$I_2 = \frac{a_1}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1^0) - \frac{a_2}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2^0),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L + L_{12})c}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L - L_{12})c}} -$$ -нормальные частоты.

Парциальная частота - это частоты колебаний системы с N степенями свободы при фиксированных N - 1 степенях.

В рассмотренном случае обе парциалные частоты совпадают и равны

$$\omega_{П1} = \omega_{П2} = \frac{1}{\sqrt{Lc}}.$$

Для нормальных и парциальных частот справедливо неравенство

$$\omega_1 < \omega_{П1} \leq \omega_{П2} < \omega_2.$$