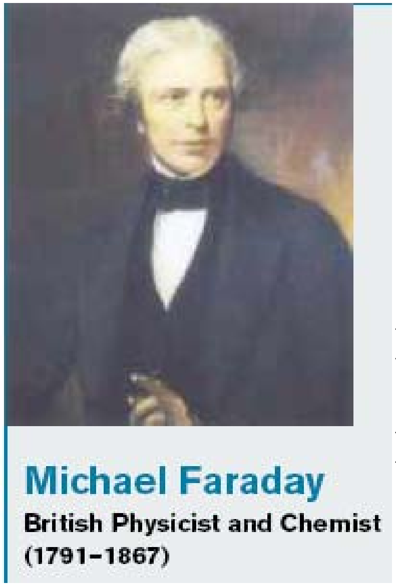
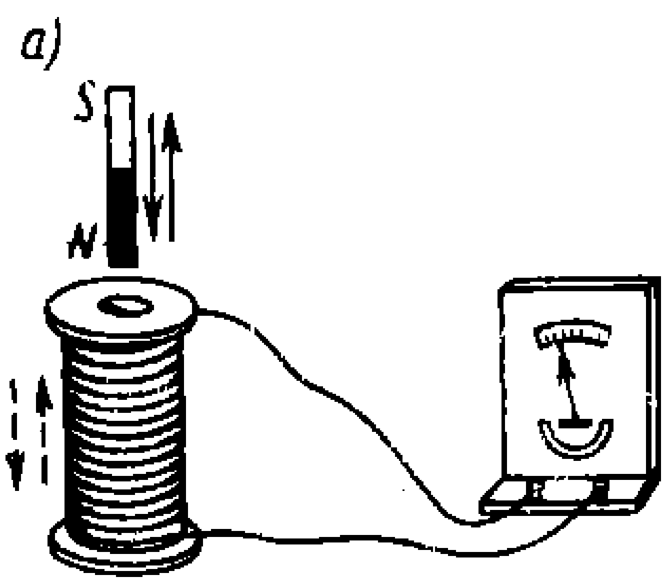
Лекция 13.

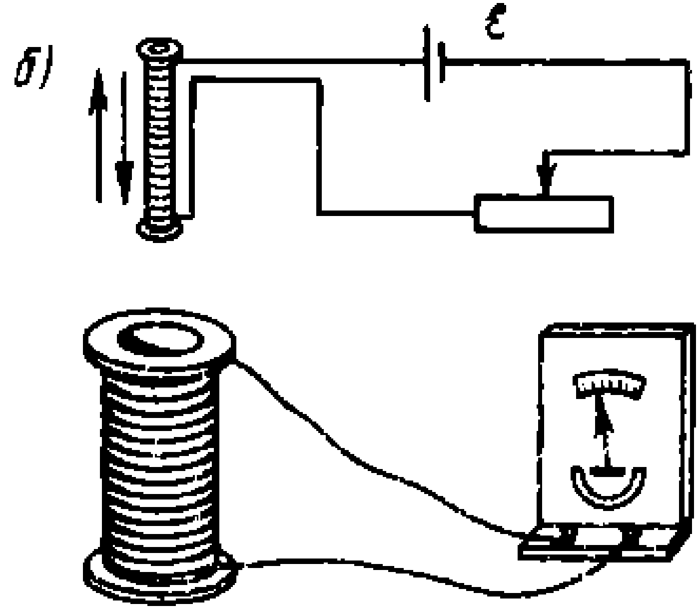
- Электромагнитная индукция. Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в дифференциальной форме. Правило Ленца. Индукционные методы измерения магнитных полей. Токи Фуко.
- Явление самоиндукции. Экстратоки замыкания и размыкания.
- Магнитная энергия тока. Магнитная энергия системы контуров с током. Энергия магнитного поля. Её объемная плотность.

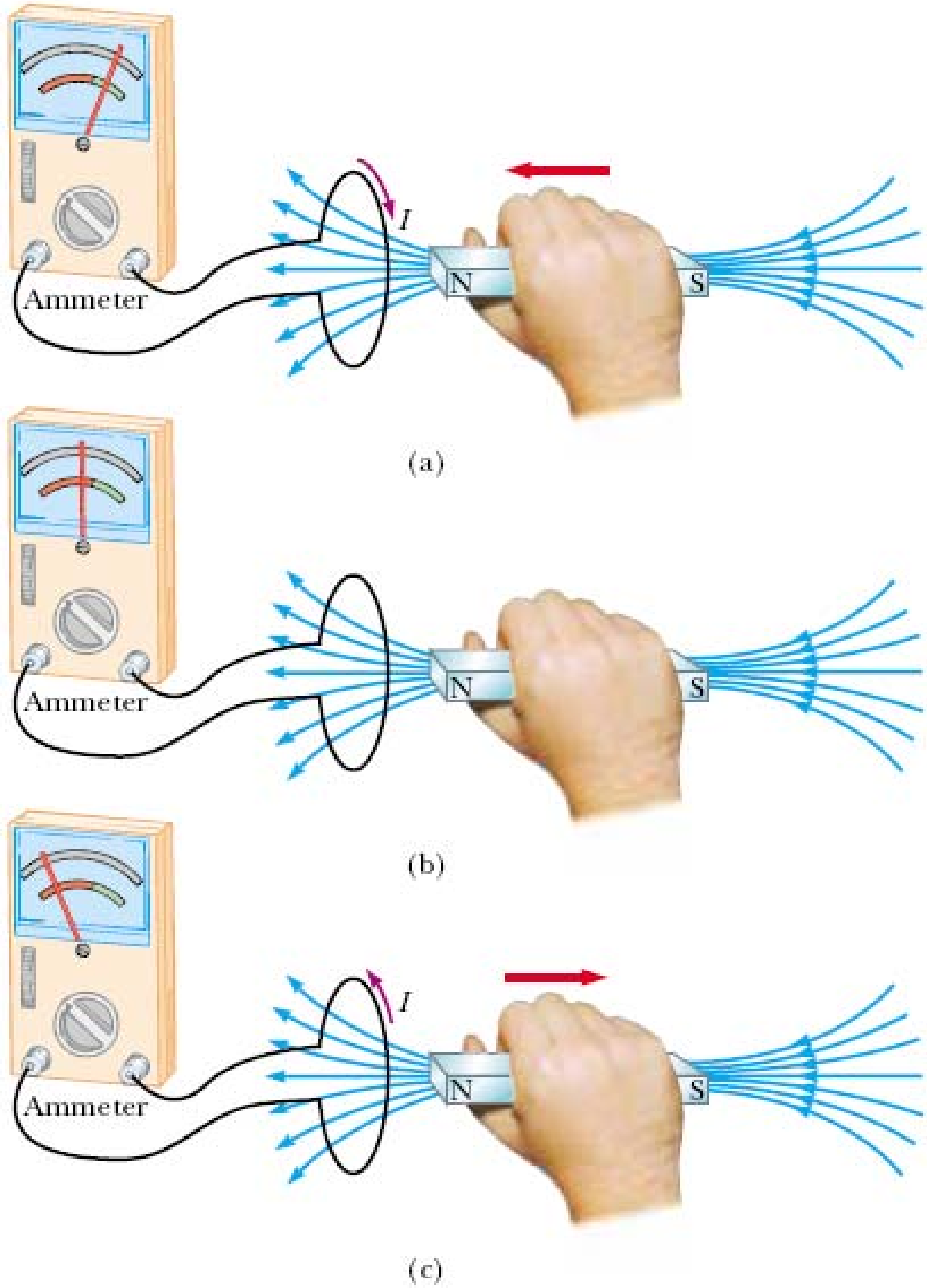
Электромагнитная индукция.



М. Фарадей в 1831 году экспериментально открыл явление электромагнитной индукции, состоящее в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром.

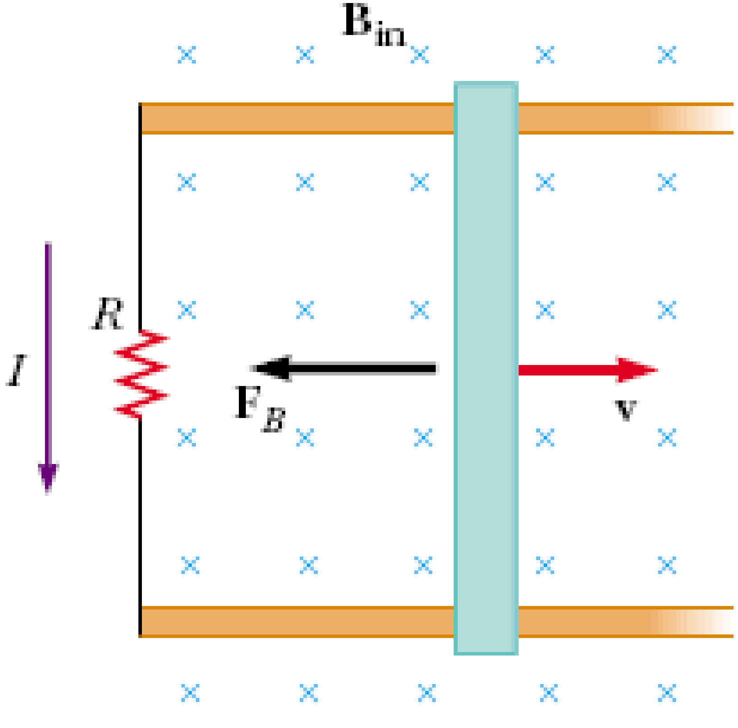


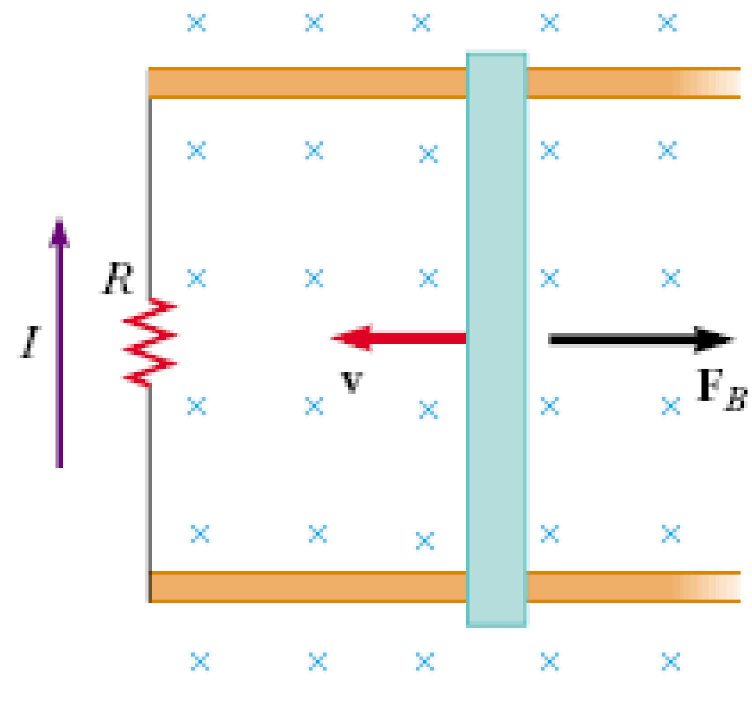


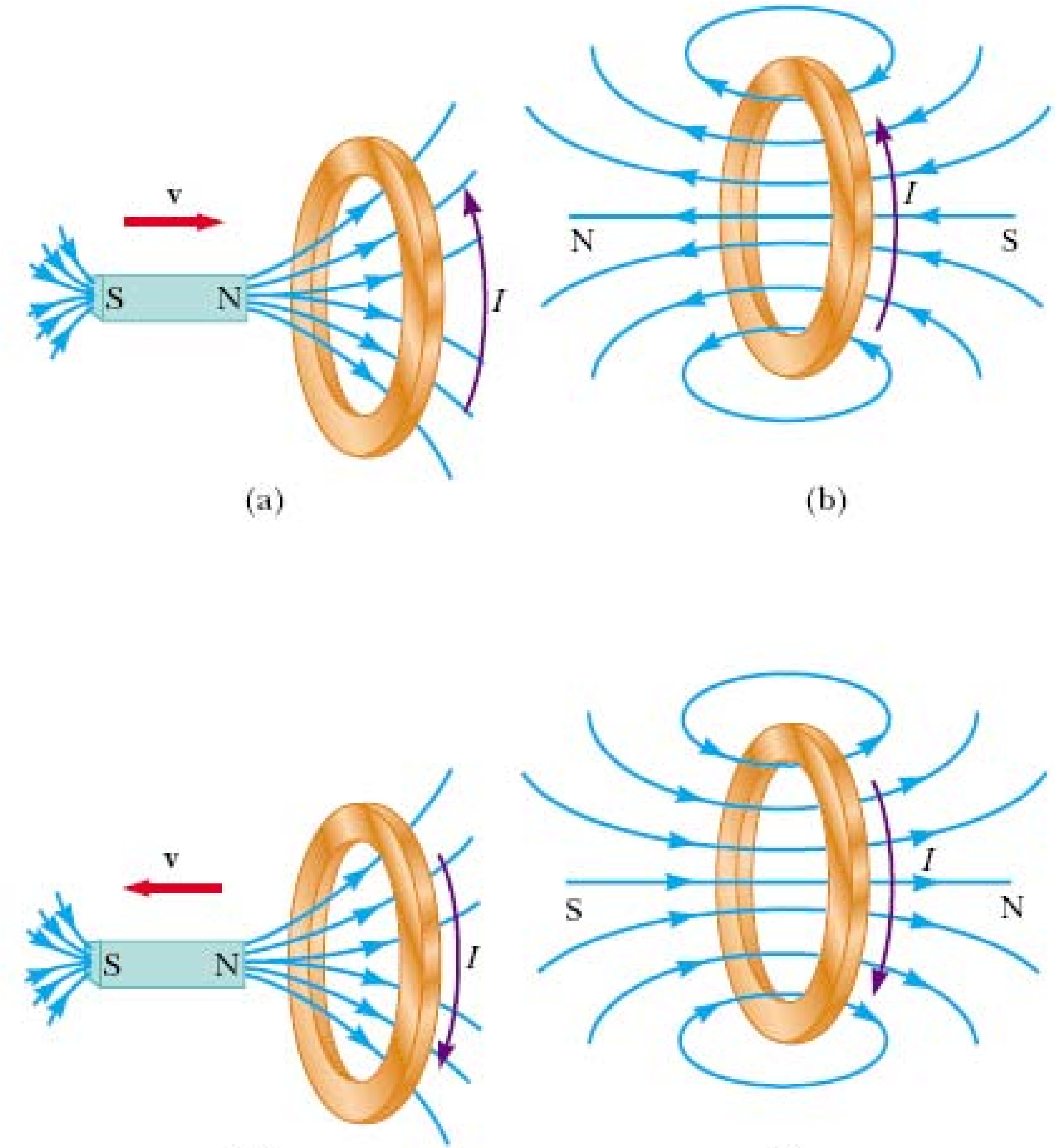

Ammeter
I
N
S
(a)
Ammeter
N
S
(b)
Ammeter
I
N
S
(c)

Правило Ленца.

Индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. (Э.Х.Ленц (1804-1865) в 1833 году)







(a) (b) (c) (d)

Индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока.

Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в интегральной форме.

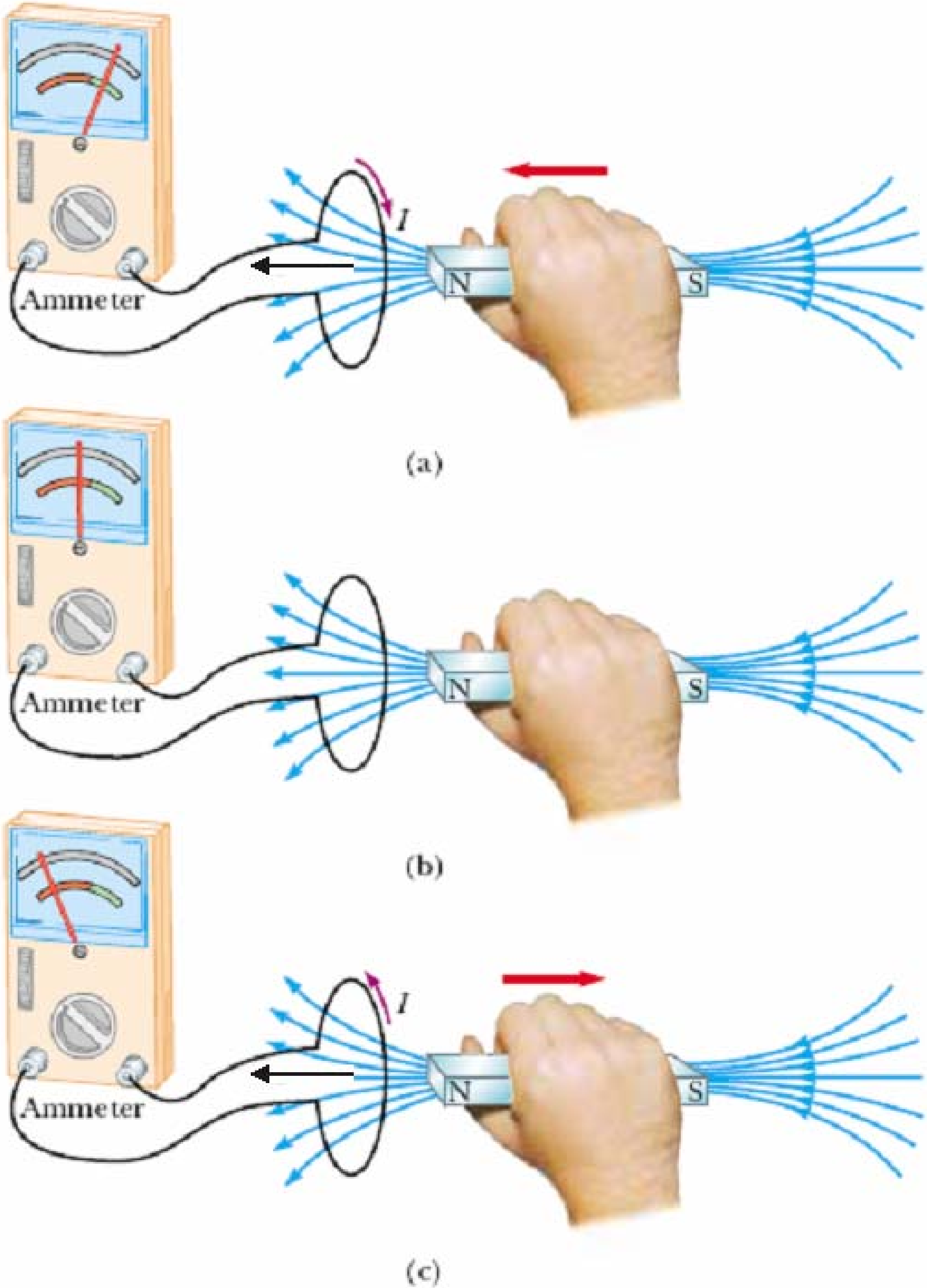
Современную математическую форму закона электромагнитной индукции Фарадея предложил в 1845 году Ф.Э.Нейман (1798-1895).

$$\mathscr{E} = f\,\frac{d\Phi}{dt},$$

где f - множитель пропорциональности, зависящий от выбора единиц. В системе единиц СИ $f = 1$.

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

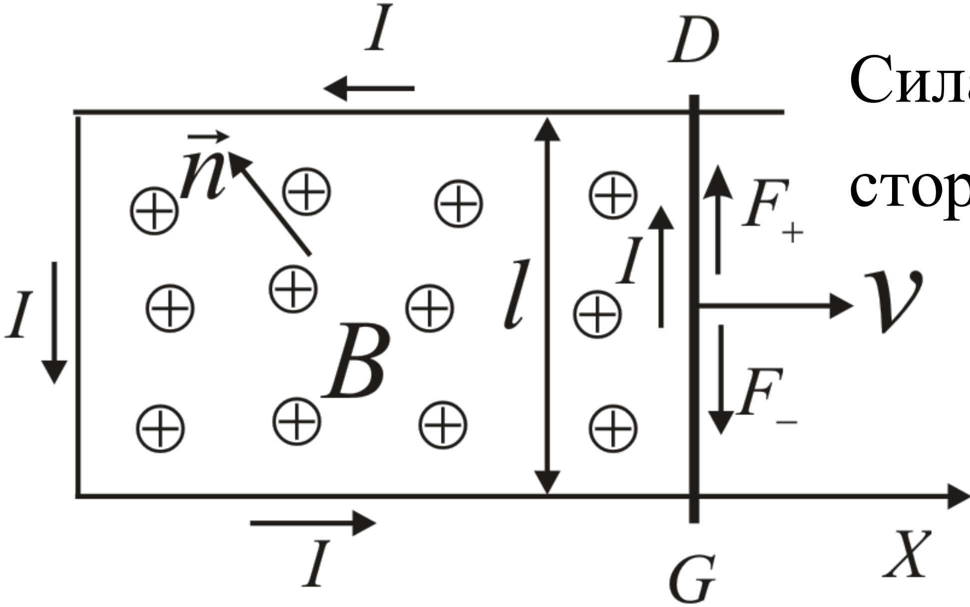
где знак минус согласует знаки ЭДС индукции и изменения потока магнитной индукции.



Выбор положительной нормали к поверхности контура определяет положительное направление проекции вектора индукции магнитного поля (положительное значение потока магнитного поля) и тока (или ЭДС) индукции.
В приведенной записи закон электромагнитной индукции соответствует правилу Ленца.

Вывод формулы для ЭДС индукции:

1) ЭДС индукции в движущихся проводниках.



Сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ – сторонняя сила, создающая ЭДС.

$$\vec{E}_{ст.} = \frac{\vec{F}}{q} = [\vec{v}, \vec{B}].$$

$$\mathscr{E}^{инд.} = \int_G^D \vec{E}_{ст.} d\vec{l} = \int_G^D ([\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}\,) = vBl = \frac{d(xBl)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt};$$

Знак минус означает, что $\vec{n}$ и $\vec{B}$ противоположны по направлению, то есть $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos 180° = -BS$.

2)Вывод формулы для ЭДС индукции из закона сохранения энергии (Метод Гельмгольца).

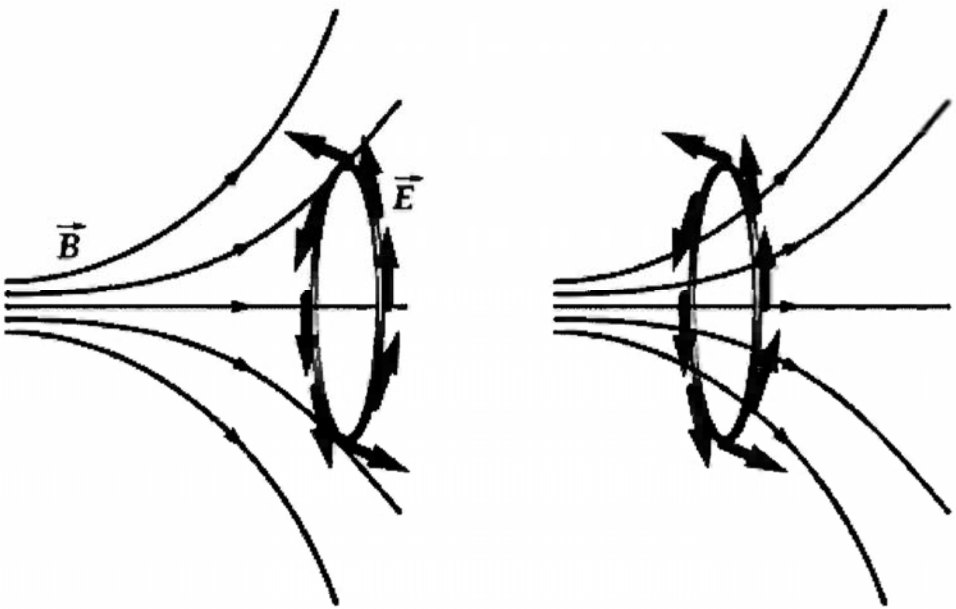
Пусть виток с током движется в стационарном магнитном поле. Тогда амперовы силы совершают работу: $\Delta A = I\Delta\Phi,$ и в контуре выделится джоулево тепло: $\Delta Q = I^2 R\Delta t$. Источником этой работы и тепловой энергии является ЭДС стронних сил в контуре

$$\mathscr{E} \cdot I\Delta t = \Delta Q + \Delta A = I^2 R\Delta t + I\Delta\Phi; \;\Rightarrow\; I = \frac{1}{R}\left(\mathscr{E} - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right);$$

Следовательно, в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E}^{инд.} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в дифференциальной форме.



Максвелловская трактовка электромагнитной индукции.

$$\mathscr{E}^{инд.} = \oint_L \vec{E}d\vec{l}\,; \quad \Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

По формуле Стокса $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{E}\cdot d\vec{S}. \Rightarrow$

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}; \;\Rightarrow \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Непотенциальность индукционного электрического поля.

Так как $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$, то $\mathrm{rot}\vec{E} \neq 0$.

Следовательно, $\vec{E} \neq -\mathrm{grad}\varphi$ и $\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} \neq 0$.

Векторный и скалярный потенциал нестационарного электромагнитного поля.

В нестационарном случае магнитное поле остается вихревым, то есть $\mathrm{div}\vec{B}=0$. Следовательно, $\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}$. Тогда, по закону электромагнитной индукции,

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A}=-\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A};\Rightarrow$$

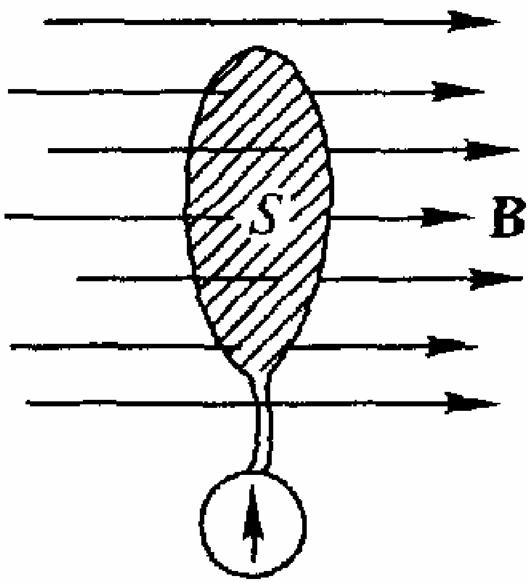
$$\mathrm{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0;\Rightarrow\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi,\ \text{то есть}\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Выбор потенциалов φ и $\vec{A}$ неоднозначен (каибровочные преобразования)

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\chi,\quad \varphi'=\varphi-\frac{\partial\chi}{\partial t};\quad \vec{E}=-\nabla\varphi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=$$

$$=-\nabla\varphi+\nabla\frac{\partial\chi}{\partial t}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Индукционные методы измерения магнитных полей.



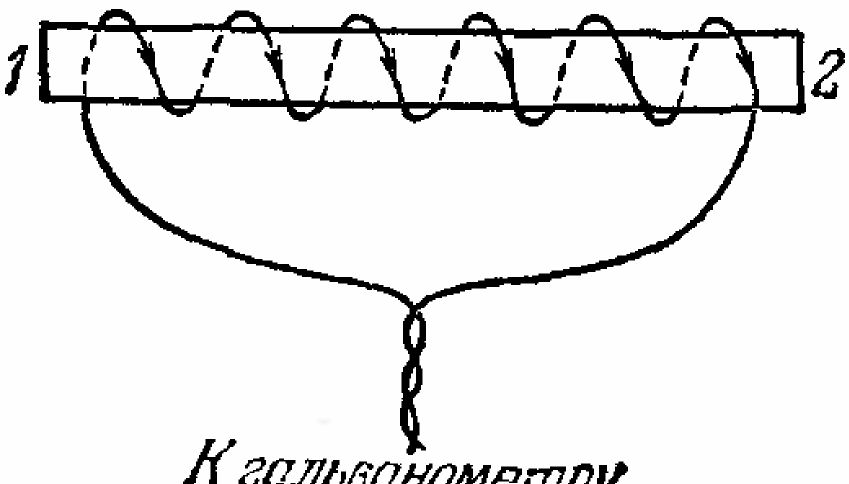
Принцип флюксметра

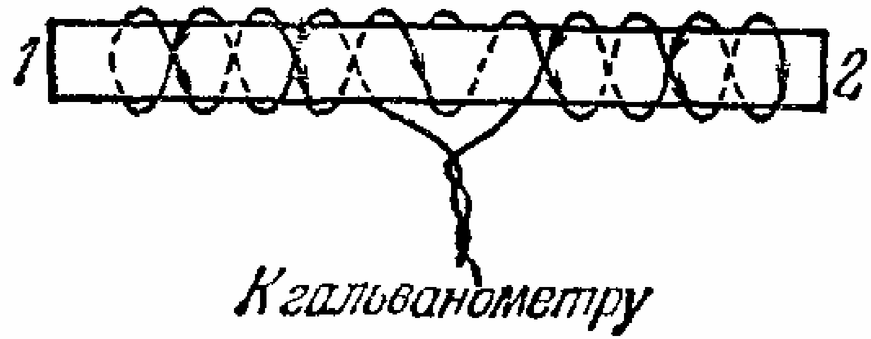
$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt};\ q = \int I dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi}^{0} d\Phi = \frac{\Phi}{R}.$$

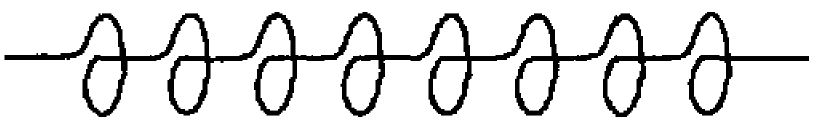
На этом соотношении основано определение единицы магнитного потока в системе СИ: Вебер - магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит количество электричества 1 Кл.

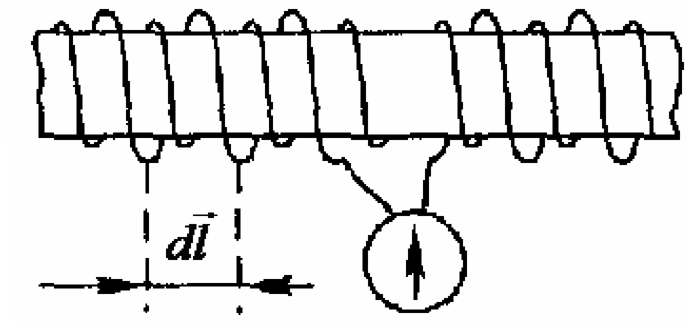
Отсюда следует определение единицы СИ для магнитной индукции: Тесла - магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м^2 равен 1 Вб.

Пояс Роговского



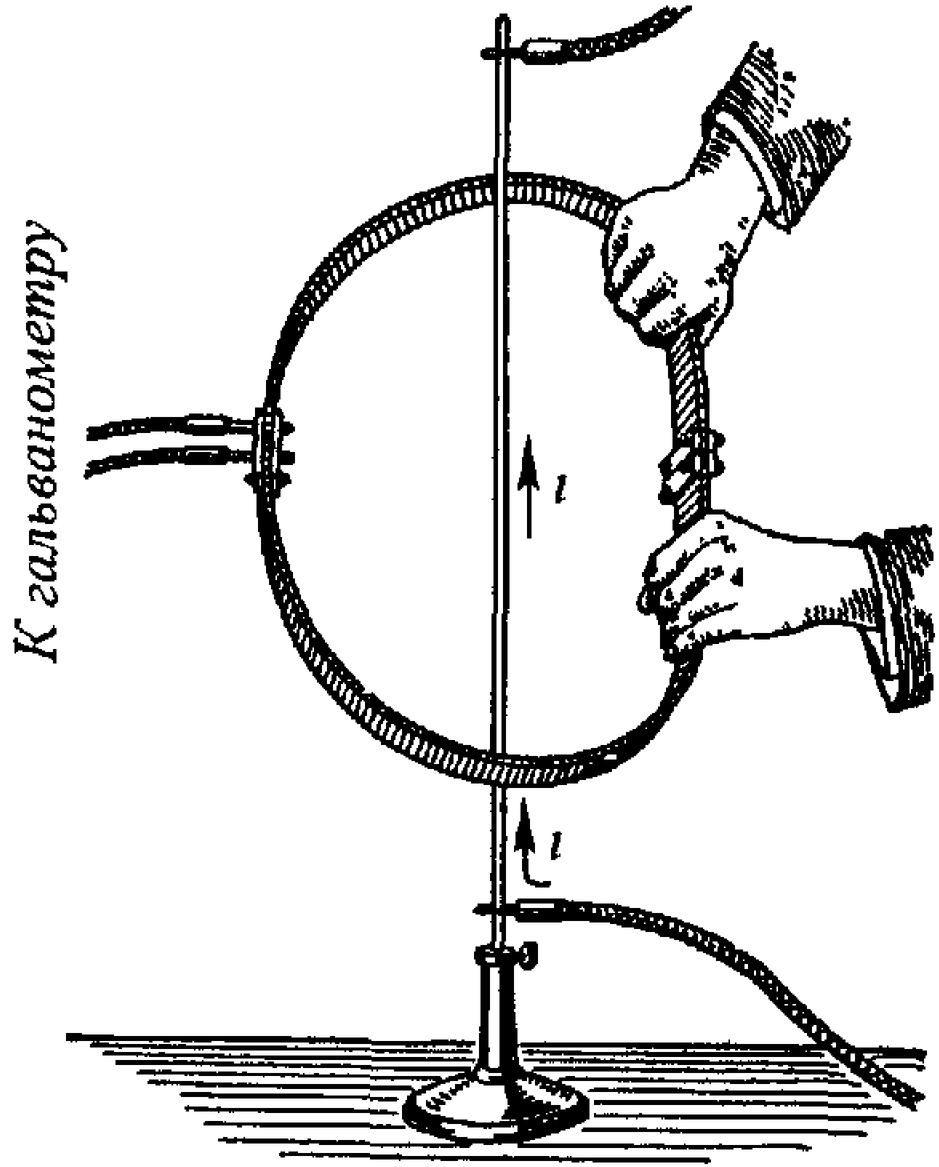






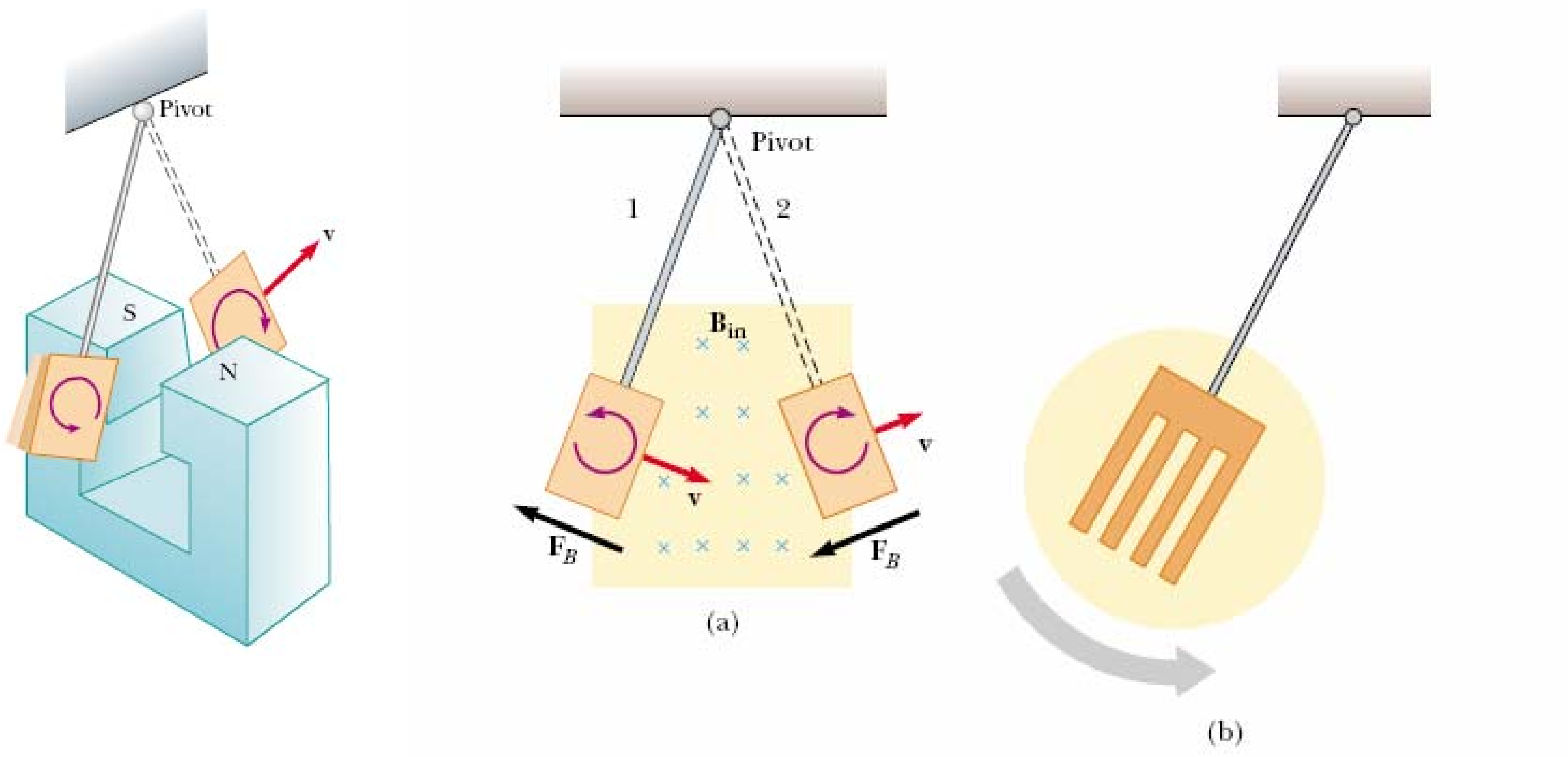
$$\Phi = \int_1^2 Sn\vec{B}d\vec{l} = Sn\int_1^2 \vec{B}d\vec{l}\,;\Rightarrow \int_1^2 \vec{B}d\vec{l} = \frac{\Phi}{Sn} = \frac{R}{Sn}q = aq,$$

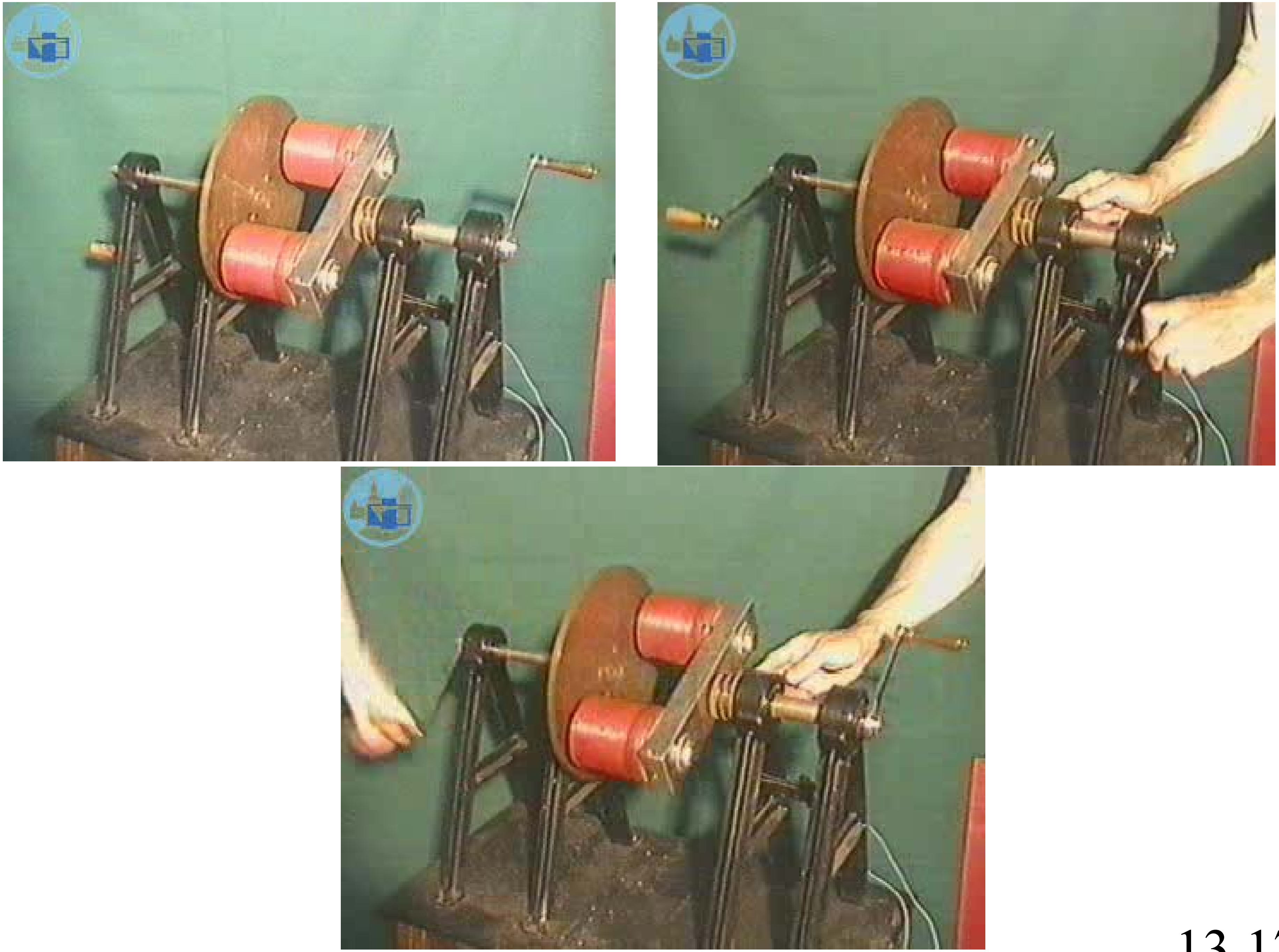
где a - постоянная баллистического гальванометра.



13.15

Токи Фуко (вихревые токи).





13.17

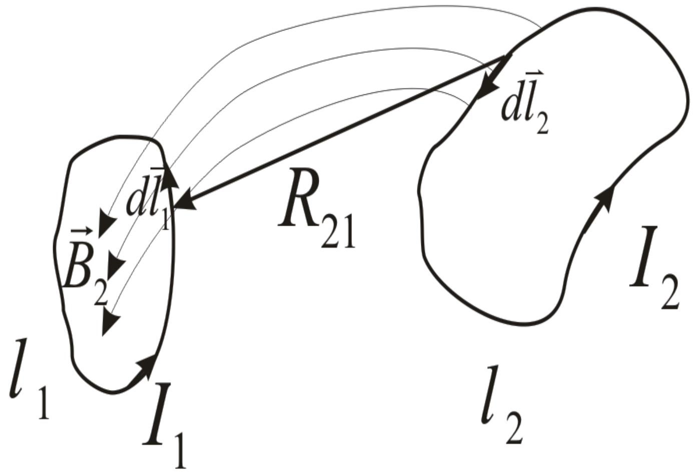
Магнитная энергия тока.

$$dA = -\mathcal{E}^{инд.} Idt = \frac{d\Phi}{dt} Idt = I\mathrm{d}\Phi;$$

$$\Phi = LI; \Rightarrow dA = dW = I \cdot LdI = d\left(\frac{LI^2}{2}\right);$$

$$\mathrm{W} = L\int_0^I IdI = \frac{LI^2}{2};$$

Магнитная энергия системы контуров с током.



$$dW_1 = I_1 d\Phi_1 = I_1 d(L_{11} I_1 + L_{12} I_2);$$

$$dW_2 = I_2 d\Phi_2 = I_2 d(L_{22} I_2 + L_{21} I_1);$$

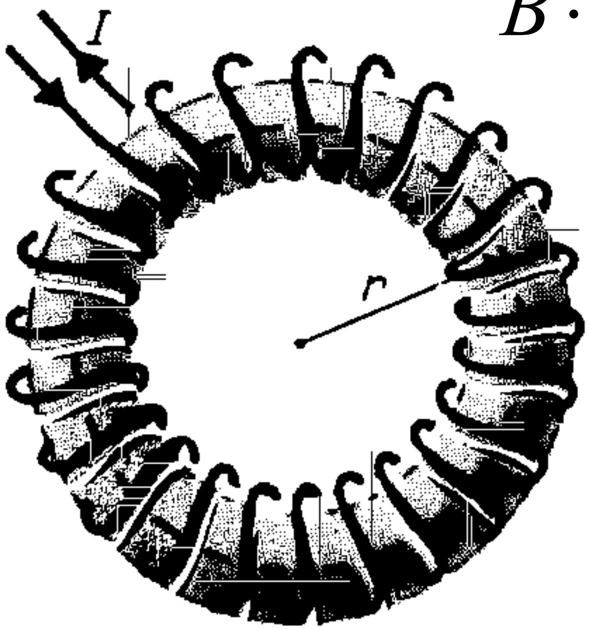
$$dW = dW_1 + dW_2 = L_{11} d(\frac{I_1^2}{2}) +$$

$$+ L_{12} I_1 dI_2 + L_{22} d(\frac{I_2^2}{2}) + L_{21} I_2 dI_1 = d(\frac{L_{11} I_1^2}{2}) +$$

$$+ \frac{d(L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1)}{2} + d(\frac{L_{22} I_2^2}{2}) = d(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} L_{ij} I_i I_j);$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} L_{ij} I_i I_j;$$

Энергия магнитного поля.
Её объемная плотность.

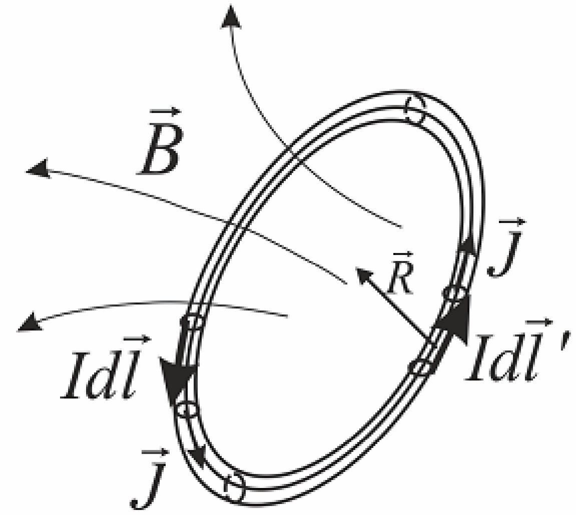


$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N\, I; \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 n\, I.$$

$$\Phi = BSN = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} SN = LI;$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} BSN \cdot I =$$

$$= \frac{1}{2} BSN \cdot \frac{B2\pi r}{\mu_0 N} = \frac{B^2}{2\mu_0} \underbrace{S2\pi r}_{V}; \quad w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0};$$



Строгий вывод

$$W=\frac{LI^2}{2}=\frac{1}{2}I\Phi=\frac{1}{2}I\int\limits_{S_l}\underbrace{\vec{B}}_{\mathrm{rot}\vec{A}}d\vec{S}=$$

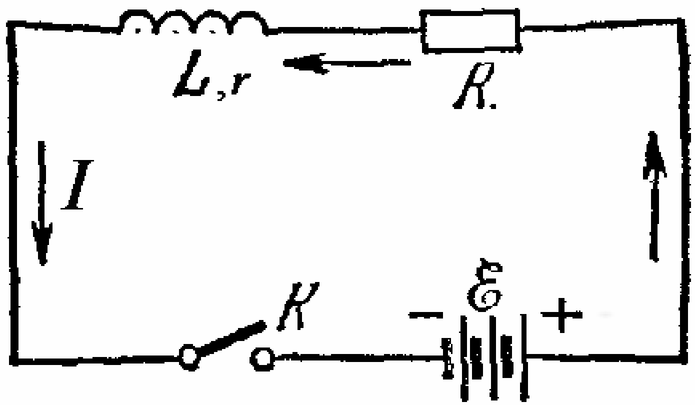
$$=\frac{1}{2}I\oint\limits_{l}\vec{A}d\vec{l}=(Id\vec{l}=\vec{J}dV)=\frac{1}{2}\oint\limits_{V}\vec{A}\vec{J}dV=$$

$$=\frac{1}{2}\oint\limits_{\infty}\vec{A}\vec{J}dV=\frac{1}{2}\oint\limits_{\infty}\vec{A}\frac{\mathrm{rot}\vec{B}}{\mu_0}dV=\frac{1}{2\mu_0}\oint\limits_{\infty}(\vec{B}\cdot\underbrace{\mathrm{rot}\vec{A}}_{\vec{B}}-\underbrace{\mathrm{div}[\vec{A},\vec{B}]}_{\oint\limits_{S_{R\to\infty}}[\vec{A},\vec{B}]d\vec{S}\to 0})dV;$$

$$(\underbrace{\nabla\cdot[\vec{A},\vec{B}]}_{\mathrm{div}[\vec{A},\vec{B}]})=(\underbrace{\vec{B}\cdot[\nabla,\vec{A}]}_{\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}})-(\underbrace{\vec{A}\cdot[\nabla,\vec{B}]}_{\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\vec{B}});$$

$$W=\frac{1}{2\mu_0}\oint\limits_{\infty}\vec{B}\vec{B}\cdot dV=\oint\limits_{\infty}wdV,\ \text{где}\ \ w=\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0};$$

Явление самоиндукции. Экстратоки замыкания и размыкания. [3,§68]



$$IR + Ir = \mathscr{E} - L\frac{dI}{dt};$$

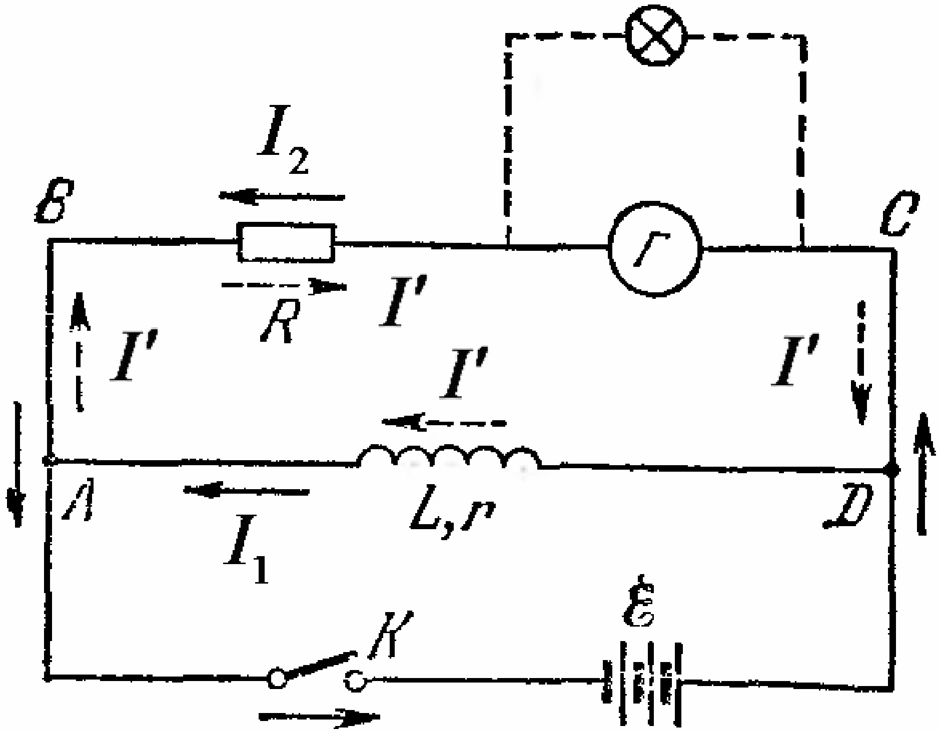
$$L\frac{dI}{dt} = \mathscr{E} - I(R+r); \Rightarrow L\frac{dI}{-\mathscr{E} + I(R+r)} = -dt;$$

$$\frac{(R+r)dI}{-\mathscr{E} + I(R+r)} = -\frac{(R+r)}{L}dt; \Rightarrow \ln(\left|I(R+r) - \mathscr{E}\right|) = -\frac{(R+r)}{L}t + C;$$

При $t = 0,\ I = 0,$ тогда $C = \ln\mathscr{E}.$ $\quad I(R+r) = \mathscr{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$

где $\tau = \dfrac{L}{R+r}$ - время установления тока.

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r} \underbrace{- \frac{\mathscr{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{R+r}}_{\text{экстраток замыкания}} .$$



После установления тока

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}; \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

После размыкания ключа

$$I'r + I'R = -L\frac{dI'}{dt};$$

$$\frac{dI'}{I'} = -\frac{r+R}{L}dt;$$

$$\ln I' = -\frac{r+R}{L}t + C. \text{ При } t = 0 \ \ C = \ln I_0, \text{ где } I_0 = I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

$$I' = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}; \Rightarrow U = I'R = \frac{R}{r}\mathcal{E}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$ – экстраток размыкания.