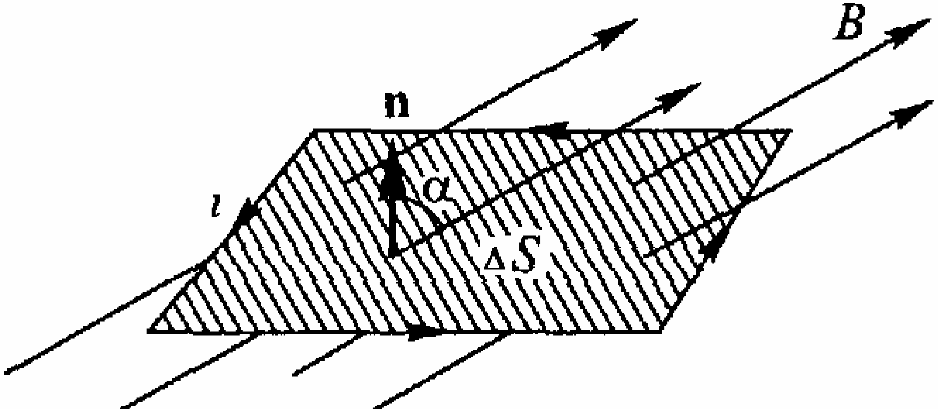
Лекция 12.

- Работа сил Ампера. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток). Потенциальная функция тока. Взаимодействие двух контуров с током. Коэффициент взаимной индукции двух контуров. Учет собственного поля уединенного контура с током. Коэффициент самоиндукции (индуктивность).

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток).

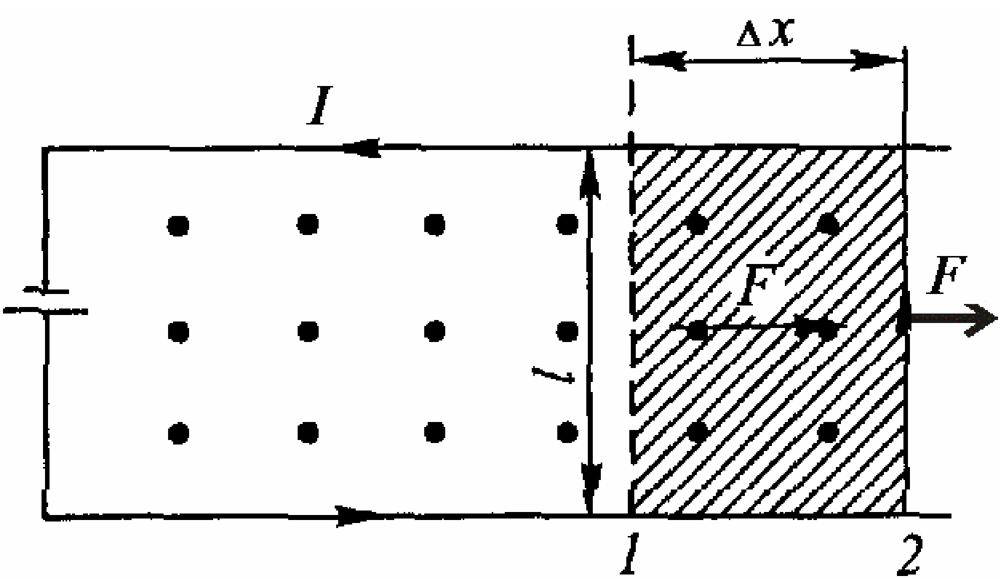


$$\Delta\Phi = B\Delta S\cos\alpha = \vec{B}\Delta\vec{S} =$$

$$= B_n\Delta S;$$

$$\Phi_S = \int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

Работа сил Ампера. Потенциальная функция тока.



$$F = IlB,$$

$$\Delta A = F\Delta x =$$

$$= IBl\Delta x = I\underbrace{B\Delta S}_{BS_2 - BS_1} =$$

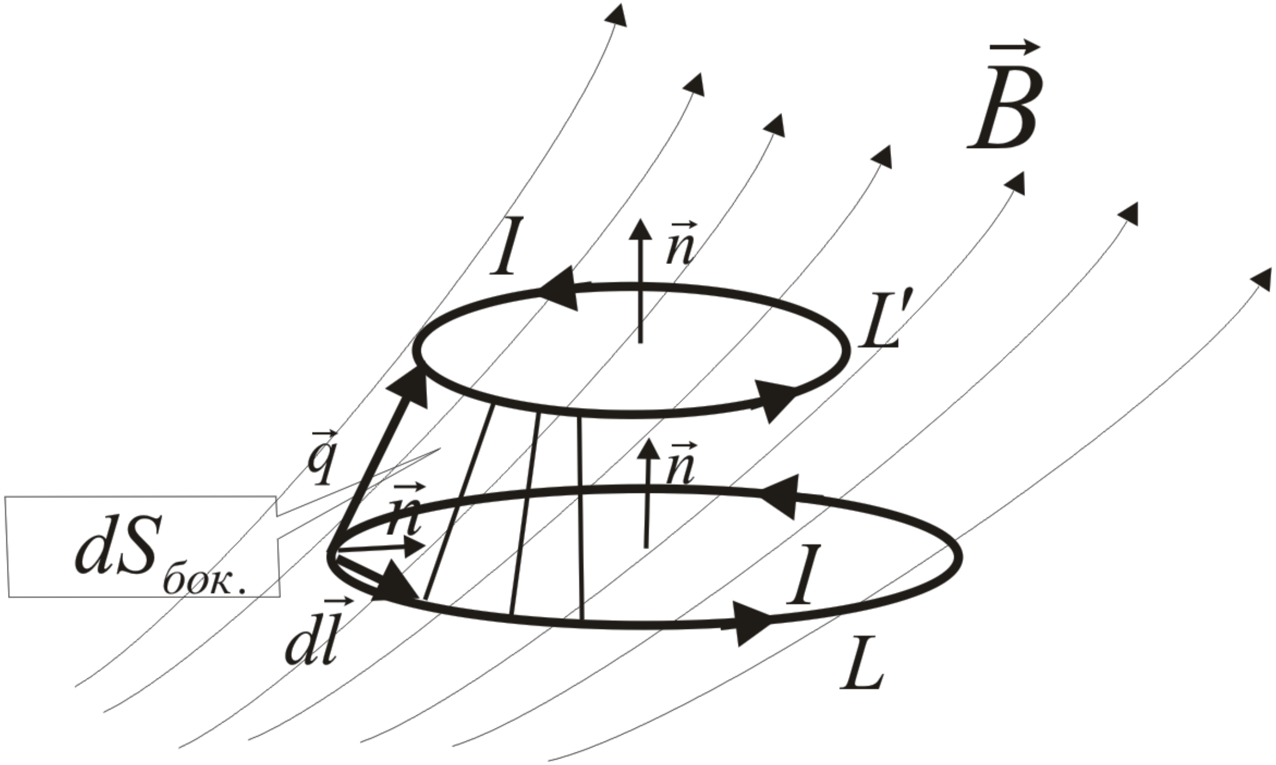
$$I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi.$$

Определим потенциальную функцию тока

$U = -I\Phi$, тогда

$\Delta A = F\Delta x = -\Delta U,$ из этого соотношения имеем

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$



$$dA = (\vec{q} d\vec{F}) =$$
$$= (\vec{q} \cdot [Id\vec{l}, \vec{B}]) =$$
$$= I(\vec{B} \cdot [\vec{q}, d\vec{l}\,] =$$
$$= I(\vec{B} d\vec{S}_{бок.});$$

$$\Delta A = I \oint\limits_{S_{бок}} (\vec{B} d\vec{S}) = I \Delta \Phi_{бок}$$

$$\Phi_L = \int\limits_{S_L} \vec{B} d\vec{S}; \; \Phi_{L'} = \int\limits_{S_{L'}} \vec{B} d\vec{S},$$

$$\Phi_L + \Delta\Phi_{бок} = \Phi_{L'}; \Rightarrow \Phi_{L'} - \Phi_L = \Delta\Phi_L = \Delta\Phi_{бок}.$$

Имеем $dA = Id\Phi_L = -dU_{I=const}$, где $U = -I\Phi_L$

Используя потенциальную или силовую функцию, можно рассчитать обобщенные силы, действующие на контур с током.

$$dA = \sum_{i=1}^{N} F_i d\xi_i = -dU(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N) = -\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right|_{I=const} d\xi;$$

$$F_i = -\left.\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right|_{I=const}.$$

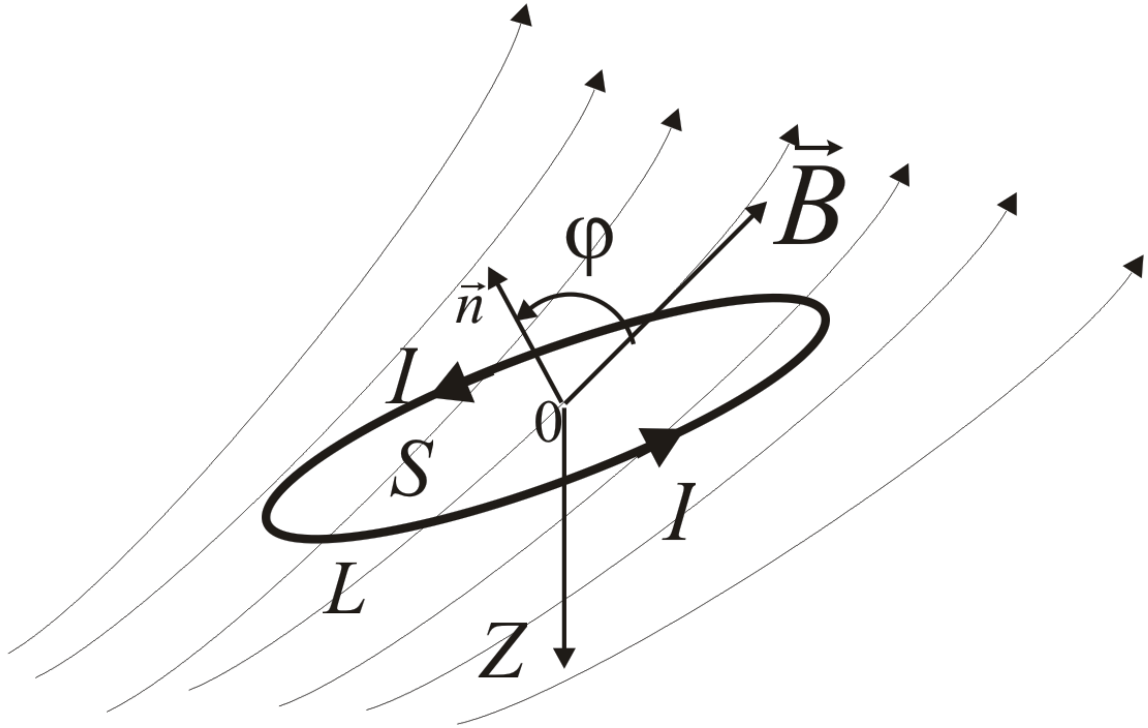
Пример

$$dA = M_z d\varphi =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi;$$

$$U = -I\Phi =$$

$$= -IBS\cos\varphi;$$

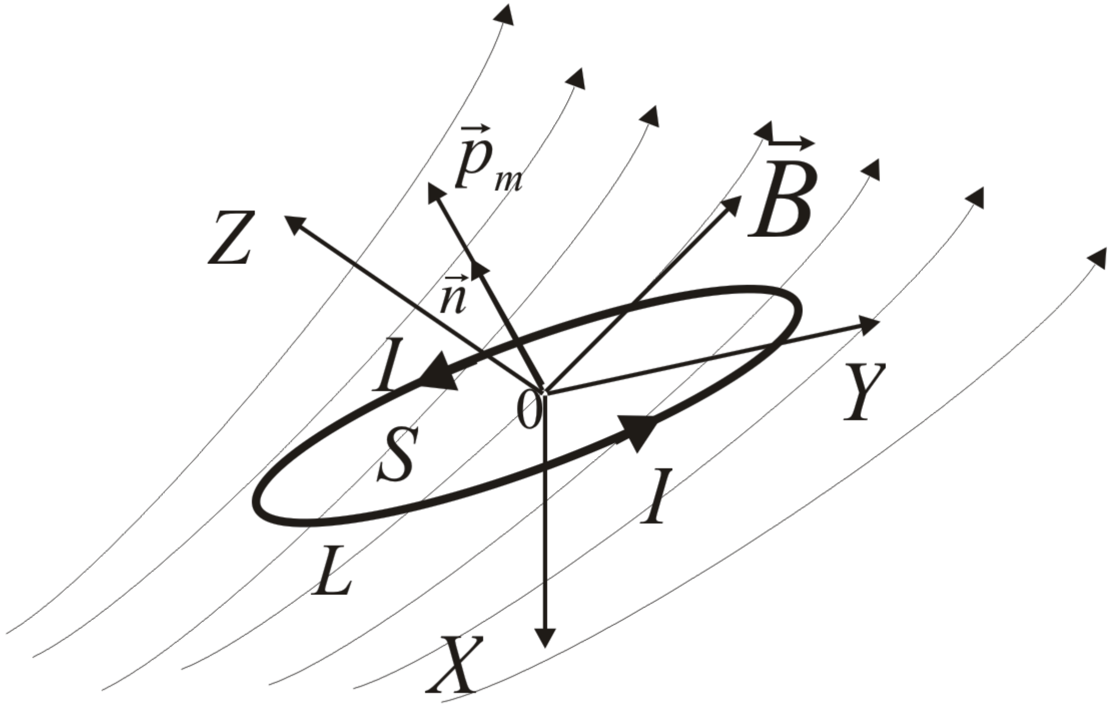


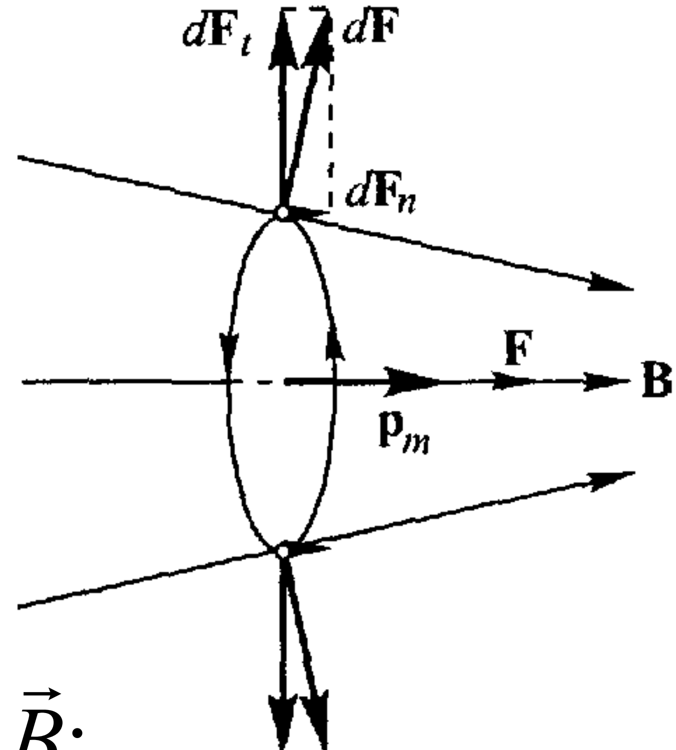
$$M_z = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\underbrace{IS}_{p_m} B\sin\varphi; \Rightarrow \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}];$$

Сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Для элементарного тока, когда $I = const$ и $S = const$, потуенциальная функция будет равна энергии взаимодействия элементарного тока или магнитного момента с внешним полем

$$U = W = -(\vec{p}_m \vec{B}); \Rightarrow \left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}; \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}; \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{p}_m \vec{B});$$



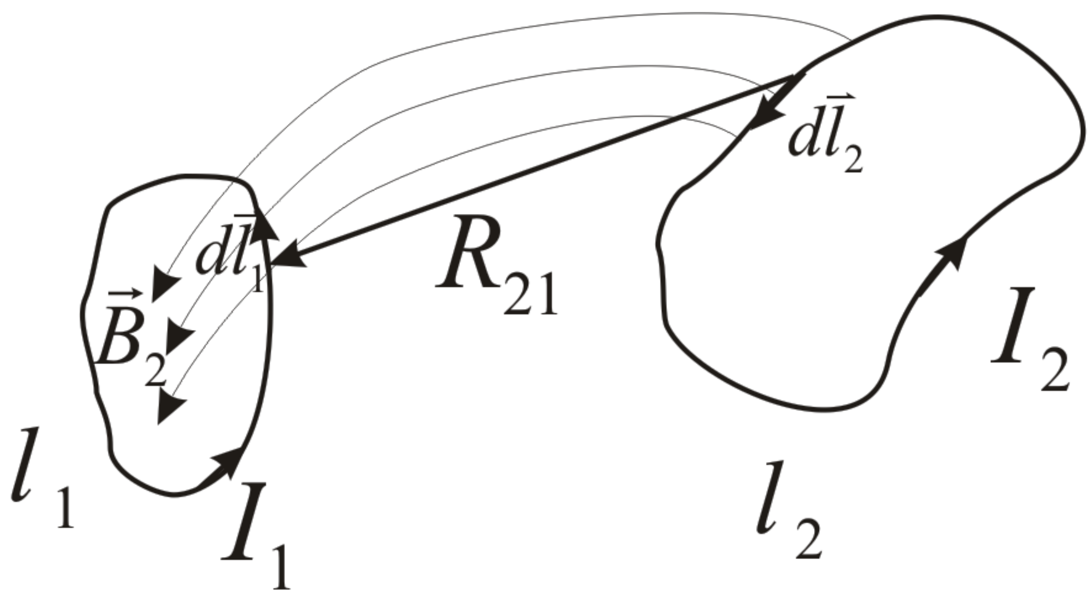


$$[\underbrace{\vec{p}_m}_{a},[\underbrace{\nabla}_{b},\underbrace{\vec{B}}_{c}]] = \nabla(\vec{p}_m\vec{B}) - (\vec{p}_m\nabla)\vec{B};$$

$$F = \nabla(\vec{p}_m\vec{B}) = (\vec{p}_m\nabla)\vec{B} + [\vec{p}_m,\underbrace{[\nabla,\vec{B}]}_{\mathrm{rot}\vec{B}}];$$

Если $\mathrm{rot}\vec{B} = 0$, то $F = (\vec{p}_m\nabla)\vec{B}$.

Коэффициент взаимной индукции двух контуров.



$$\Phi_{12} = \int\limits_{S_{l_1}} \underbrace{\vec{B}_2}_{\mathrm{rot}\vec{A}_2} d\vec{S}_1 =$$

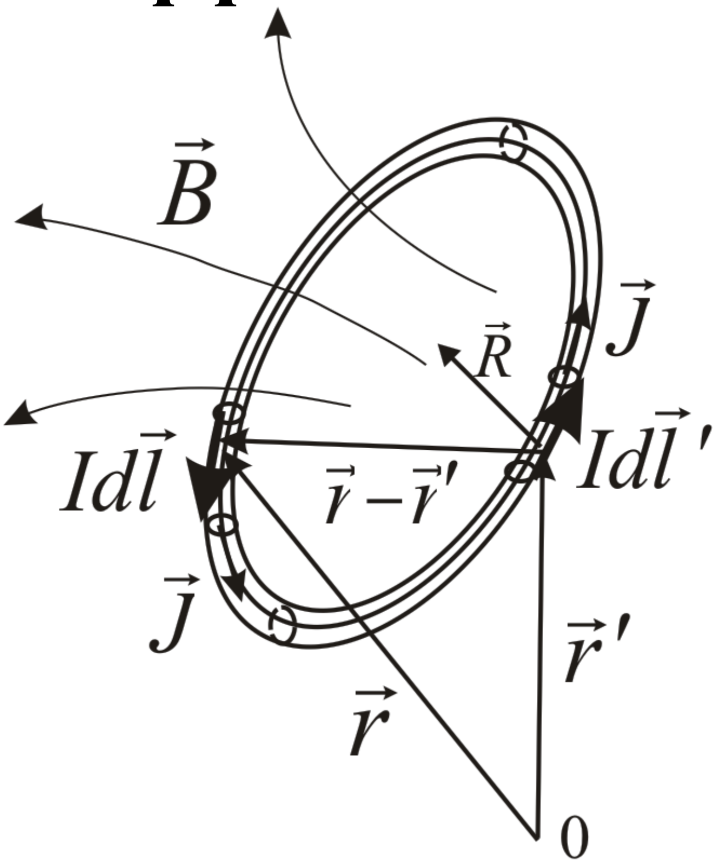
$$= \oint\limits_{l_1} \vec{A}_2 d\vec{l} =$$

$$= \oint\limits_{l_1} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{l_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2}{R_{21}} \right) d\vec{l}_1 = \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{l_1} \oint\limits_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 d\vec{l}_1}{R_{21}} \right)}_{L_{12}} I_2 = L_{12} I_2;$$

Аналогично получим

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \text{ где } L_{21} = L_{12}.$$

Коэффициент самоиндукции (индуктивность).



$$\Phi = \int_{S_l} \vec{B} d\vec{S} = L \cdot I; \; \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I[d\vec{l}', \vec{R}]}{R^3};$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I[d\vec{l}', (\vec{r} - \vec{r}')]}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3};$$

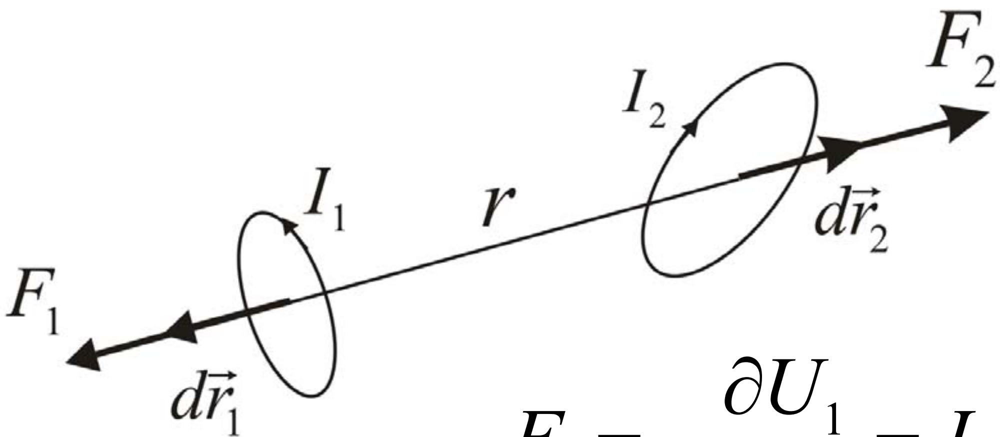
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \frac{dV'[\vec{J}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')]}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3};$$

Коэффициенты индуктивности контуров с токами.

$$\Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2; \quad \Phi_2 = L_{22} I_2 + L_{21} I_1;$$

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j; \quad L_{ij} = L_{ji};$$

Взаимодействие двух контуров с током.



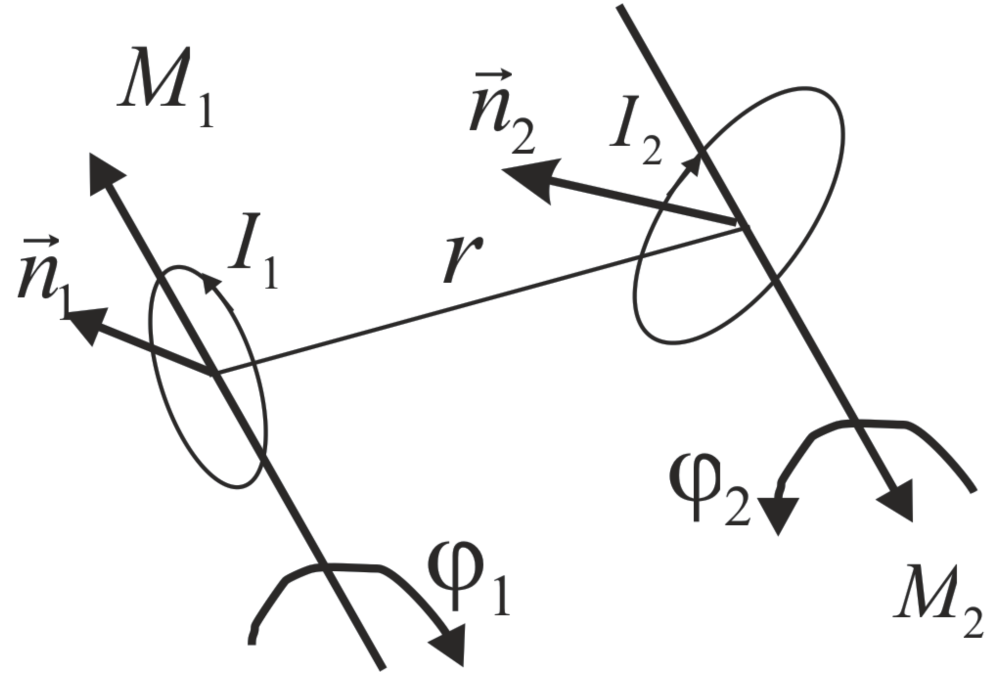
$$d\vec{r}_2 = -d\vec{r}_1;$$

Проекции на r: $dr_2 = -dr_1$.

$$F_1 = -\frac{\partial U_1}{\partial r_1} = I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial r_1};$$

$$F_2 = -\frac{\partial U_2}{\partial r_2} = I_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial r_2};$$

$$L_{12} = L_{21}; \quad \frac{\partial L_{21}}{\partial r_2} = -\frac{\partial L_{12}}{\partial r_1}; \quad F_1 = -F_2;$$



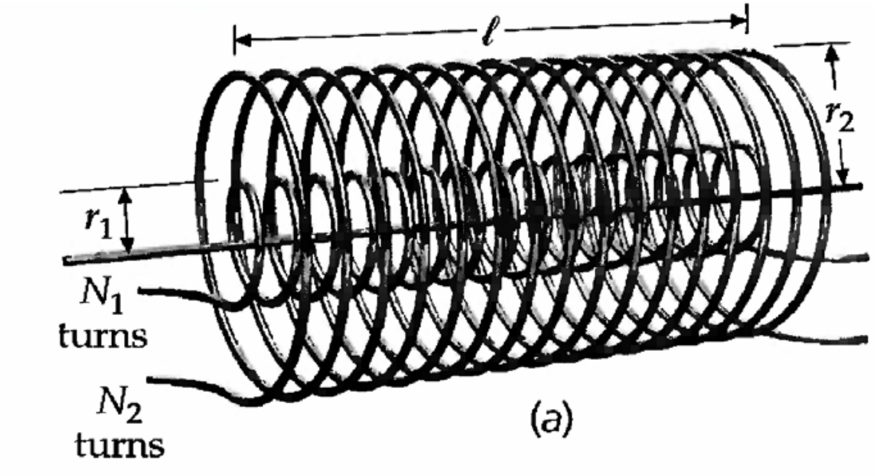
$$d\varphi_1 = -d\varphi_2;$$

$$M_1 = -\frac{\partial U_1}{\partial \varphi_1} = I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_1};$$

$$M_2 = -\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_2} = I_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial \varphi_2};$$

так как $\dfrac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_2} = -\dfrac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_1}; \quad M_1 = -M_2;$

Пример задачи на вычисление коэффициентов индуктивности.



$$\Phi_2 = B_2 N_2 \pi r_2^{\,2} + B_1 N_2 \pi r_1^{\,2} =$$

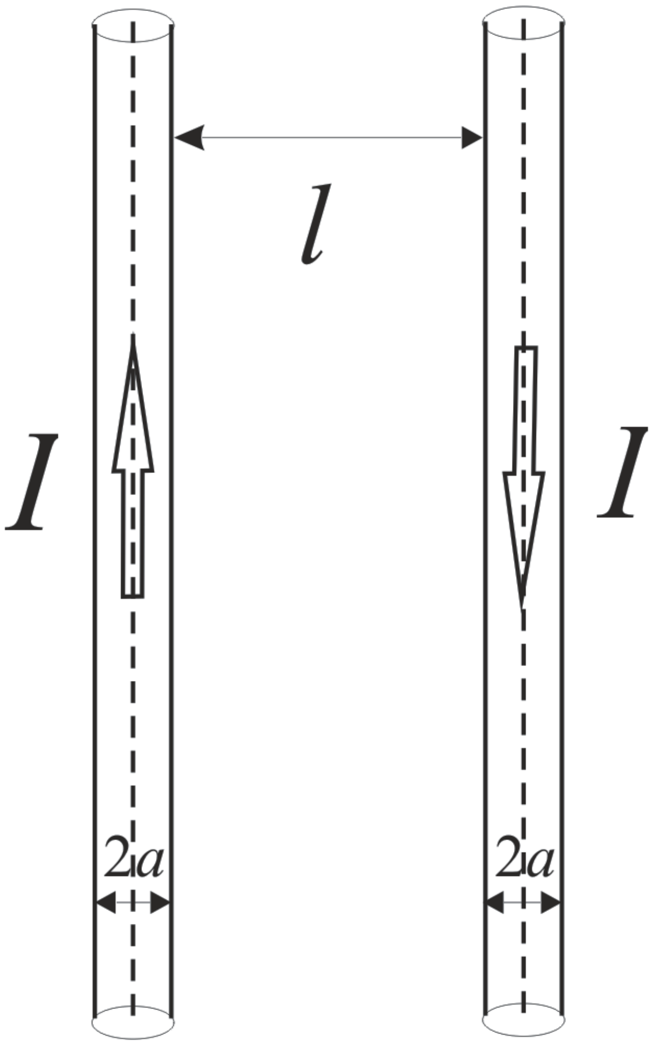
$$= \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_2 \pi r_2^{\,2} + \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_2 \pi r_1^{\,2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_2 \pi r_2^{\,2}}{l}}_{L_{22}} I_2 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_1^{\,2}}{l}}_{L_{21}} I_1;$$

$$\Phi_1 = B_1 N_1 \pi r_1^{\,2} + B_2 N_1 \pi r_1^{\,2} = \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_1 \pi r_1^{\,2} + \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_2 \pi r_1^{\,2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_1 \pi r_1^{\,2}}{l}}_{L_{11}} I_1 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi r_1^{\,2}}{l}}_{L_{12}} I_2; \quad L_{12} = L_{21};$$

Индуктивность двухпроводной линии из пустотелых проводников.



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I; \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \int_a^{l+a} B dr =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_a^{l+a} \frac{1}{r} dr = I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right);$$

$$\Phi = 2\Phi_1 = \underbrace{\frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right)}_{L} I$$