

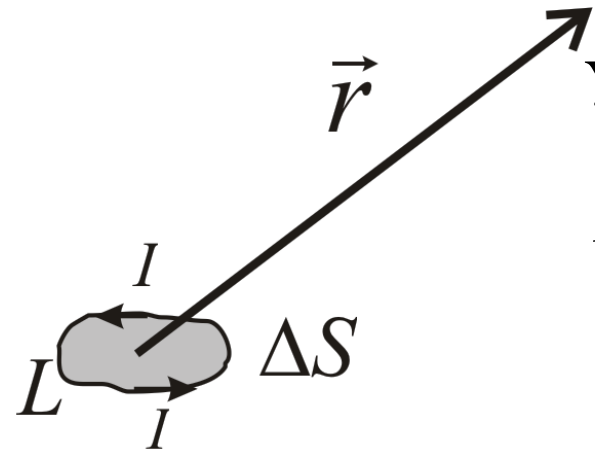
Лекция 11.

- Элементарный ток и его магнитный момент. Поле элементарного тока. Магнитное поле движущегося заряда. Силы, действующие на токи в магнитном поле. Определение единицы силы тока — ампера. Элементарный ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Эффект Холла.

Элементарный ток и его магнитный момент.

Векторный потенциал элементарного тока.

Элементарный ток - это линейный замкнутый ток, обтекающий поверхность с бесконечно малыми линейными размерами.



Учитывая, что для линейного тока $\vec{J}dV = Id\vec{l}$

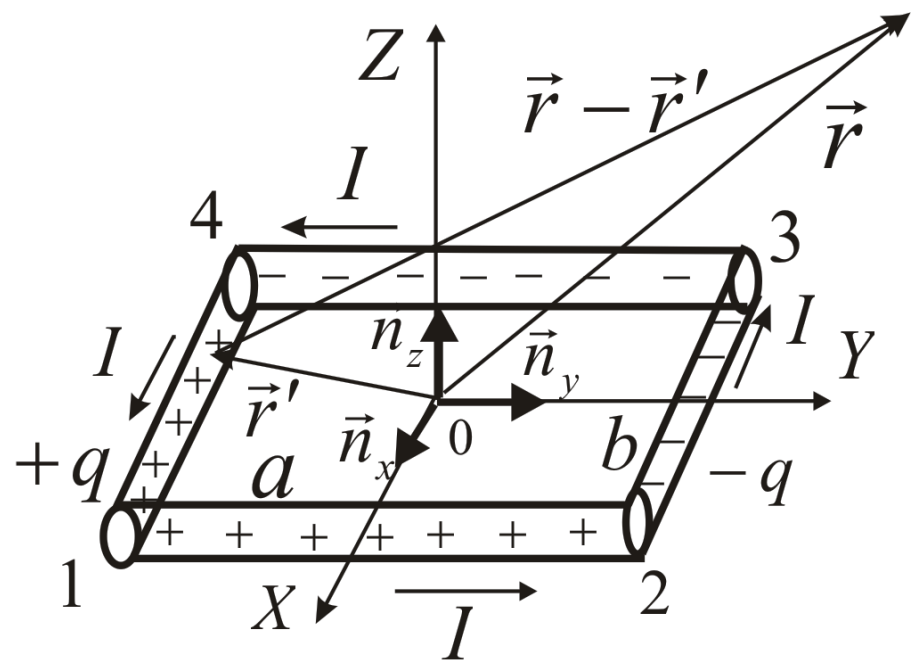
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad A(\vec{r})_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl'_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \int_L \frac{Idl'_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \text{где } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0};$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\gamma(\vec{r}')dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

Функция $A(\vec{r})_x$ равна $\varphi(\vec{r})$

при $\gamma(\vec{r}')dl' = Idl'_x / c^2$.



Выберем контур элем. тока. в виде прямоугольника со сторонами a и b .

$$q_{14} = \frac{I}{c^2} b; \quad q_{23} = -\frac{I}{c^2} b;$$

$$\vec{p}_q^1 = -q_{14} a \vec{n}_y = -\frac{I}{c^2} \underbrace{ba}_S \vec{n}_y =$$

$= -\frac{p_m}{c^2} \vec{n}_y$, где $p_m = IS$ - магнитный момент элементарного тока.

$$A_x = \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_q^1 \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_m y}{c^2 r^3};$$

Аналогично находим:

$$A_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_m x}{c^2 r^3}; \quad A_z = 0.$$

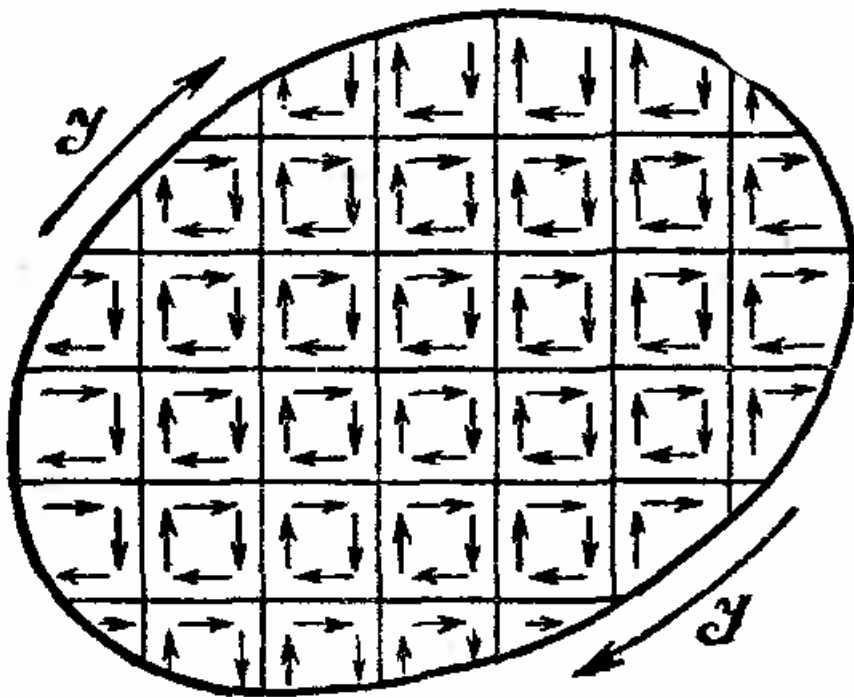
Если ввести вектор $\vec{p}_m = p_m \vec{n}_z = IS \vec{n}_z$, то $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3}$.

Здесь учтено равенство $c^2 = 1 / \epsilon_0 \mu_0$.

Действительно

$$\frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3} = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ 0 & 0 & p_m \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix}.$$

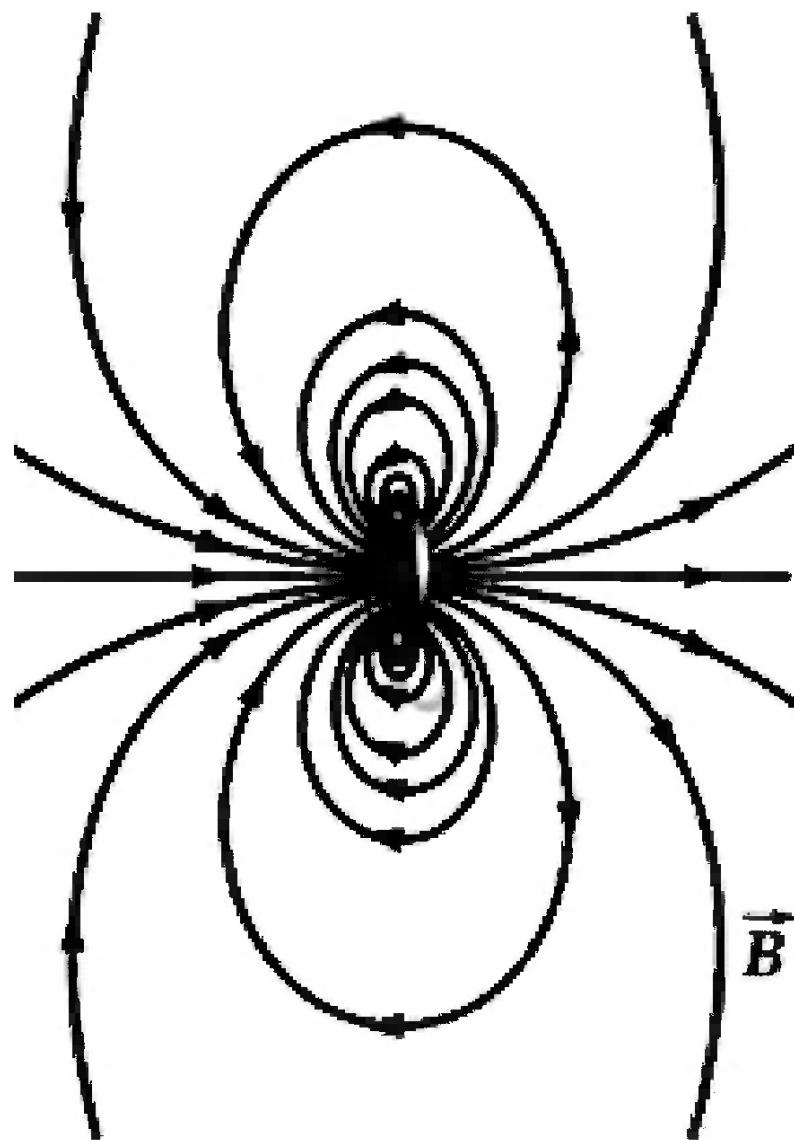
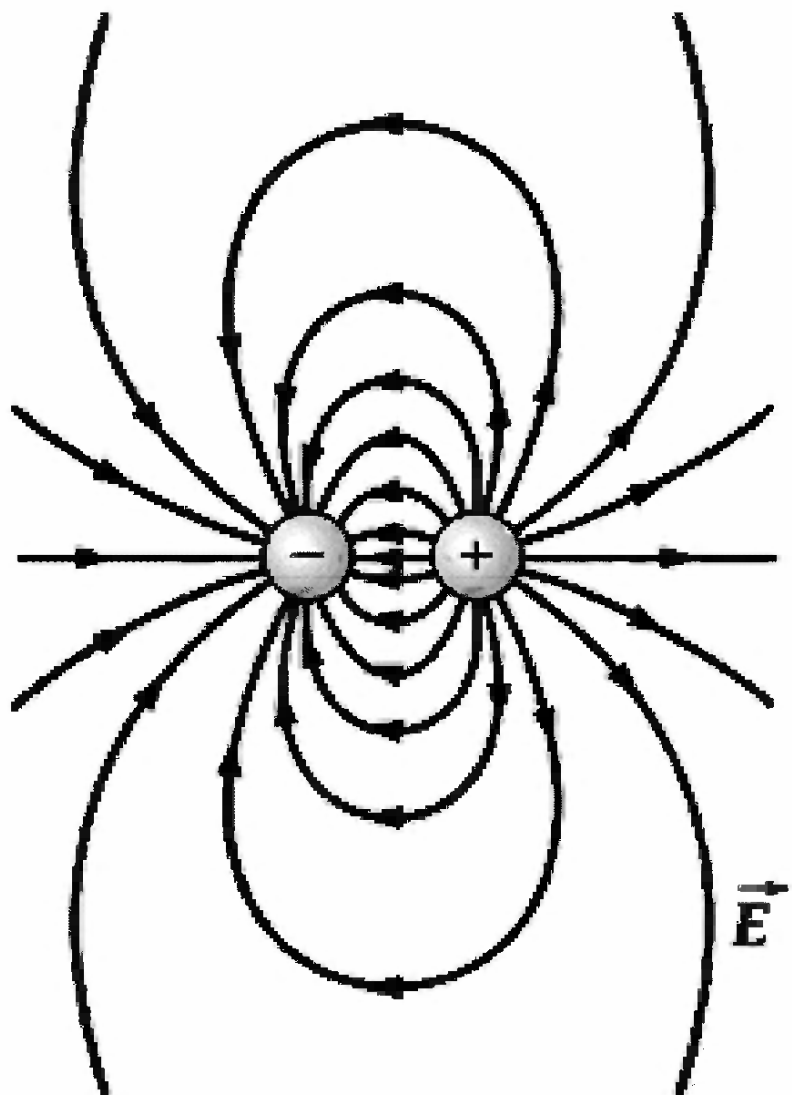
Элементарный ток произвольной формы можно свести к совокупности прямоугольных элем. токов



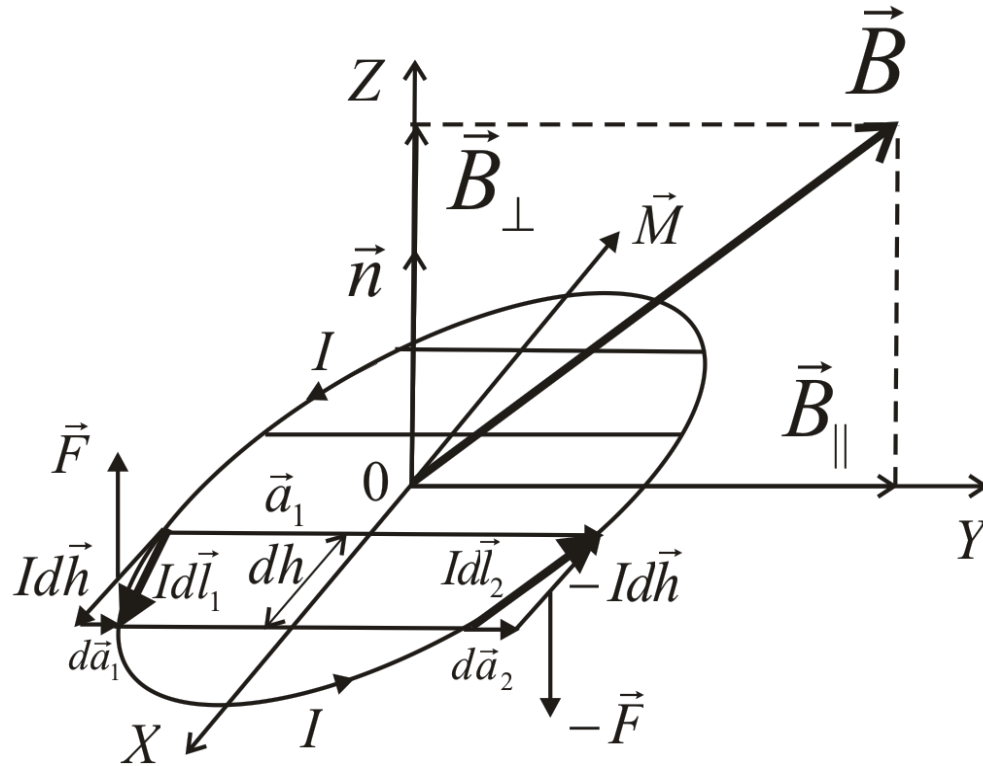
$$\begin{aligned} \vec{p}_m &= \sum_n \vec{p}_n = \sum_n I \vec{S}_n = \\ &= I \sum_n \vec{S}_n = I \vec{S}. \end{aligned}$$

Поле элементарного тока.

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} = [\nabla, \vec{A}] = [\underbrace{\nabla}_{\vec{a}}, \frac{\mu_0}{4\pi} [\underbrace{\vec{p}_m}_{\vec{b}}, \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}}_{\vec{c}}]] = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} (\underbrace{\vec{p}_m (\nabla \frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{p}_m \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3}}_0); \\
 (\nabla \frac{\vec{r}}{r^3}) &= \frac{(\nabla \vec{r})}{r^3} + (\vec{r} \nabla \frac{1}{r^3}) = \frac{3}{r^3} - \frac{(\vec{r} \cdot 3\vec{r})}{r^5} = 0. \\
 (\vec{p}_m \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} &= \frac{(\vec{p}_m \nabla) \vec{r}}{r^3} + \vec{r} (\vec{p}_m \nabla) \frac{1}{r^3} = \frac{\vec{p}_m}{r^3} - \vec{r} (\vec{p}_m \frac{3\vec{r}}{r^5}); \\
 \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right).
 \end{aligned}$$

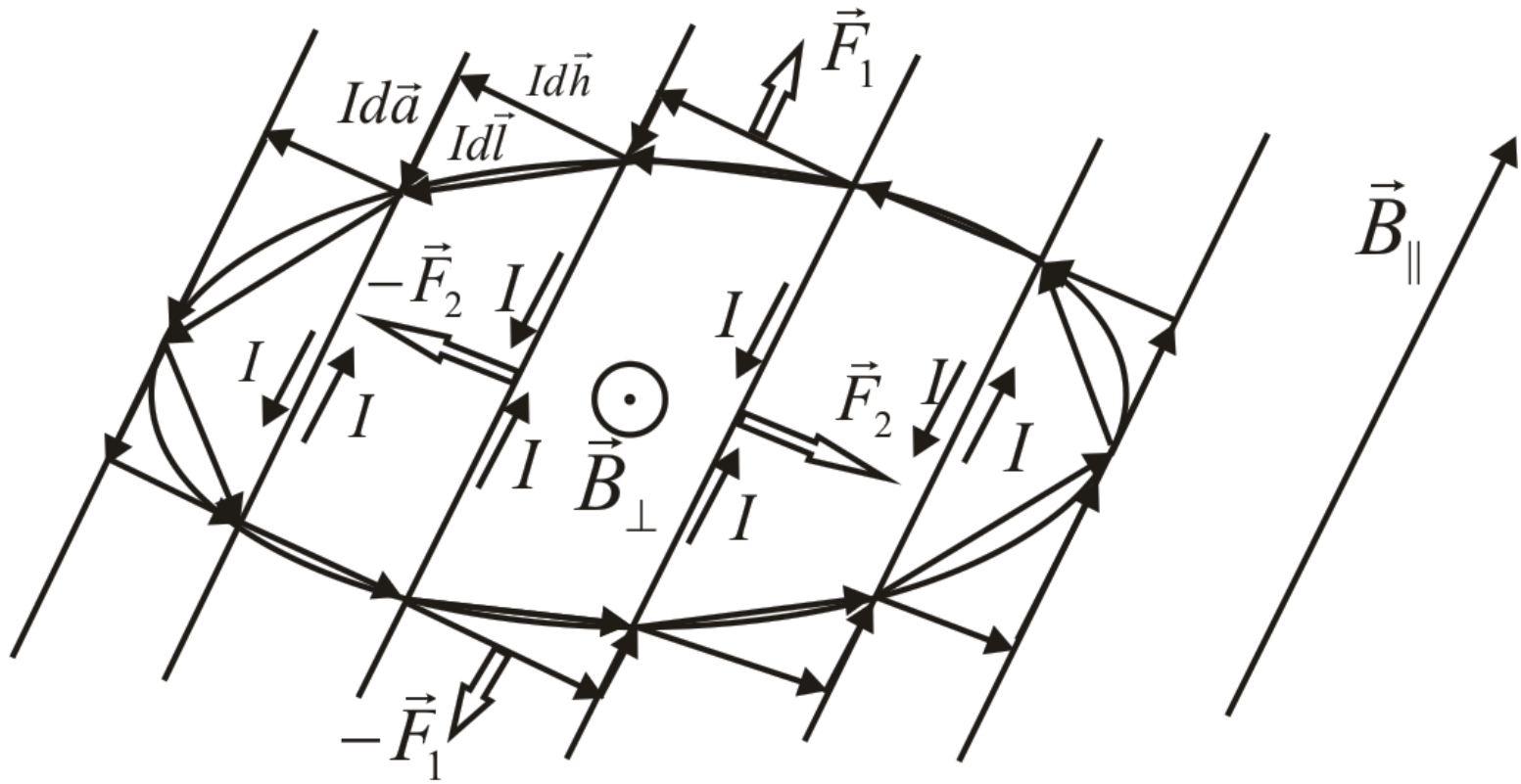


Элементарный ток в магнитном поле.



$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= [Id\vec{l}_1, \vec{B}_{\parallel}] = \\
 &= [(Id\vec{h} + Id\vec{a}_1), \vec{B}_{\parallel}] = [Id\vec{h}, \vec{B}_{\parallel}]; \\
 -\vec{F} &= [Id\vec{l}_2, \vec{B}_{\parallel}] = [-Id\vec{h}, \vec{B}_{\parallel}]; \\
 d\vec{M} &= [\vec{a}_1, \vec{F}] = [\vec{a}_1, [-Id\vec{h}, \vec{B}_{\parallel}]] = \\
 &= \frac{[\vec{n}, \vec{B}_{\parallel}]}{B_{\parallel}} I \underbrace{dha_1}_{\Delta S} B_{\parallel} = [\underbrace{I\Delta S \vec{n}}_{\Delta \vec{p}_m}, \vec{B}_{\parallel}];
 \end{aligned}$$

$$\vec{M} = \sum d\vec{M} = [I \underbrace{\sum_S \Delta S}_{\vec{p}_m} \vec{n}, \vec{B}_{\parallel}] = [\vec{p}_m, \vec{B}_{\parallel}];$$

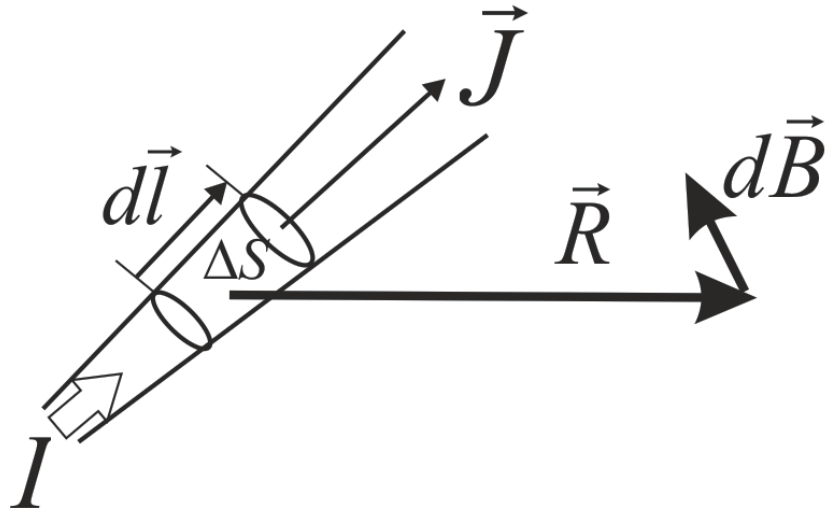


$$\vec{M} = \sum d\vec{M} = [I \underbrace{\sum \Delta S \vec{n}}_S, \vec{B}_{\parallel}] = [\vec{p}_m, \vec{B}_{\parallel}] = [\vec{p}_m, \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}] = [\vec{p}_m, \vec{B}];$$

В однородном поле, сила действующая на контур с током, равна

$$\vec{F} = \sum [I d\vec{l}, \vec{B}] = I [\underbrace{\sum d\vec{l}}_0, \vec{B}] = 0.$$

Магнитное поле движущегося заряда



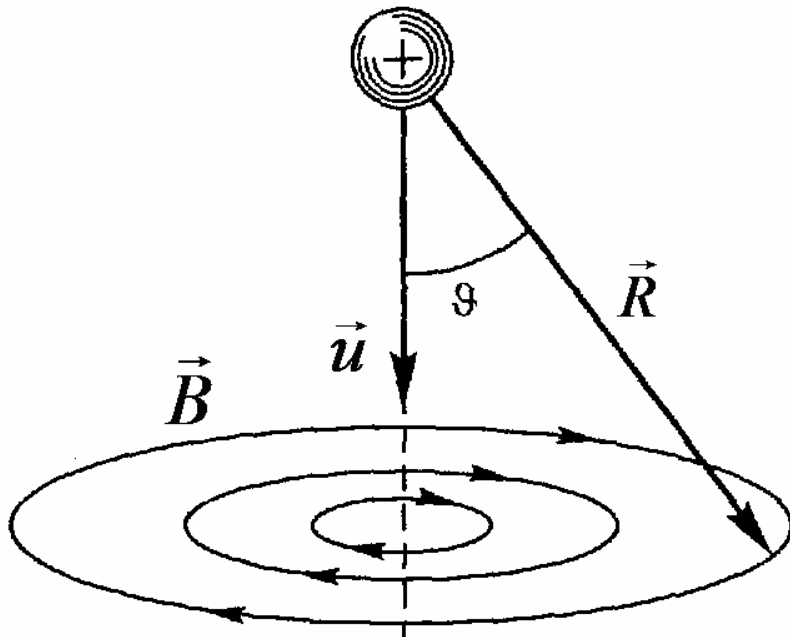
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{J}, \vec{R}]}{R^3} dV;$$

$$\vec{J} = qn\vec{u};$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} q \underbrace{ndV}_N;$$

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3};$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qu \sin \vartheta}{R^2};$$



Движущийся заряд создает элемент тока $q\vec{u}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} = \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{1/c^2} \left[\vec{u}, \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{R}}{R^3}}_{\vec{E}} \right] = \frac{1}{c^2} [\vec{u}, \vec{E}];$$

Силы, действующие на токи в магнитном поле.
Сила Лоренца.

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}] = [\vec{J}, \vec{B}]dV; \quad \vec{F}_A = I \int_L [d\vec{l}, \vec{B}] = \int_V [\vec{J}, \vec{B}]dV.$$

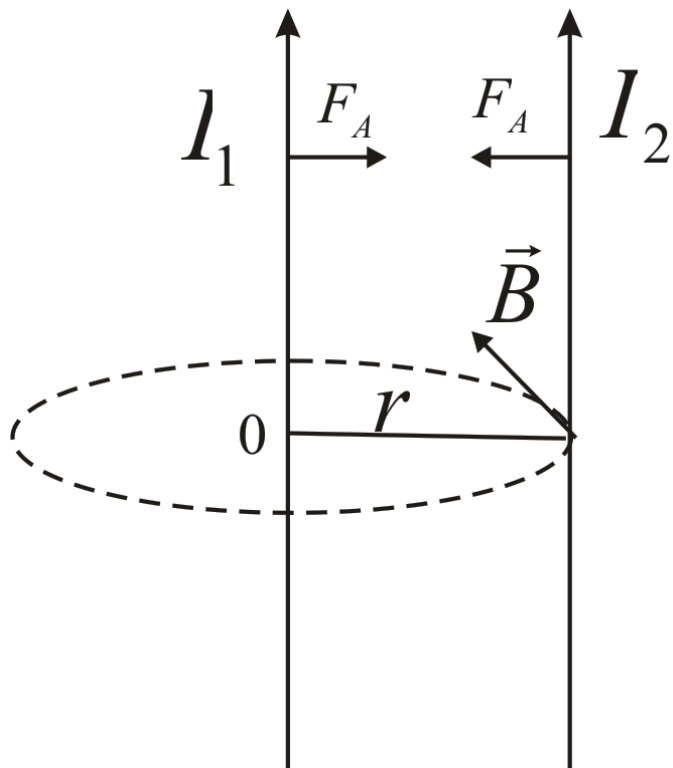
Так как элемент тока движущего заряда $I d\vec{l} = q\vec{u}$,
то сила, действующая на движущий заряд
в магнитном поле, равна

$$\vec{F} = q[\vec{u}, \vec{B}].$$

Если имеется и электрическое поле, то

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u}, \vec{B}] - \text{Сила Лоренца.}$$

Определение единицы силы тока — Ампера.

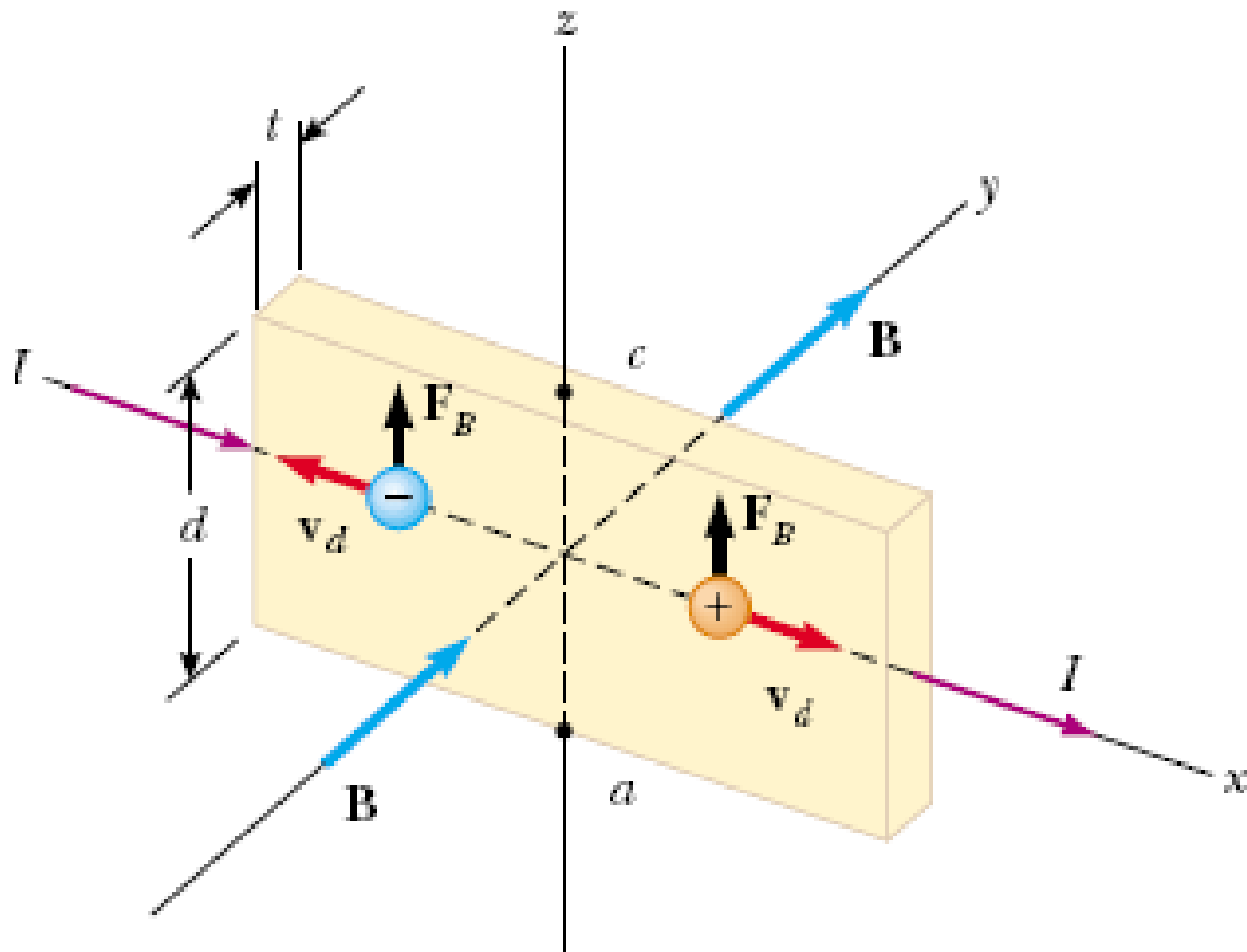


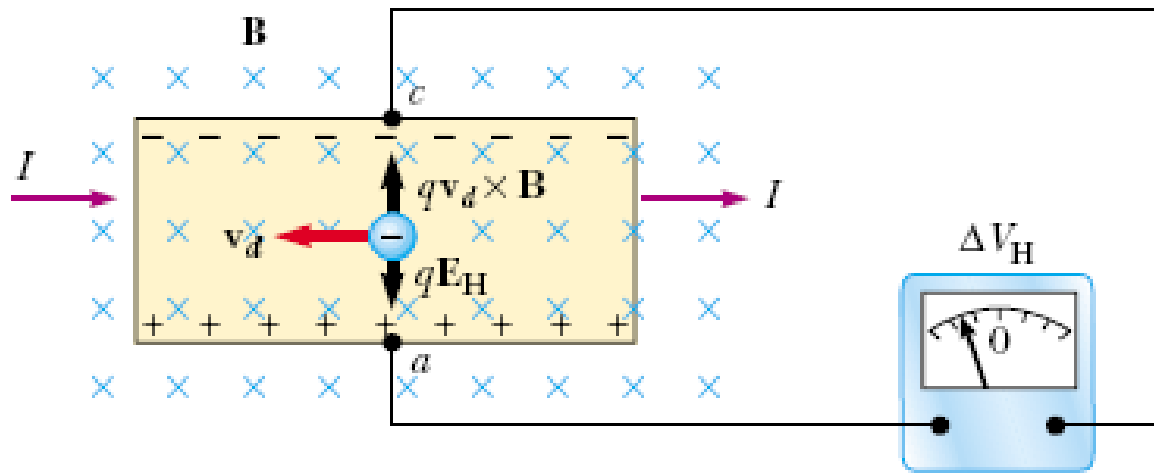
$$F_A = \mu_0 \frac{I_2 I_1}{2\pi r} L;$$

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ H} = \mu_0 \frac{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 1 \text{ м}} \cdot 1 \text{ м}; \Rightarrow$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}};$$

Эффект Холла.





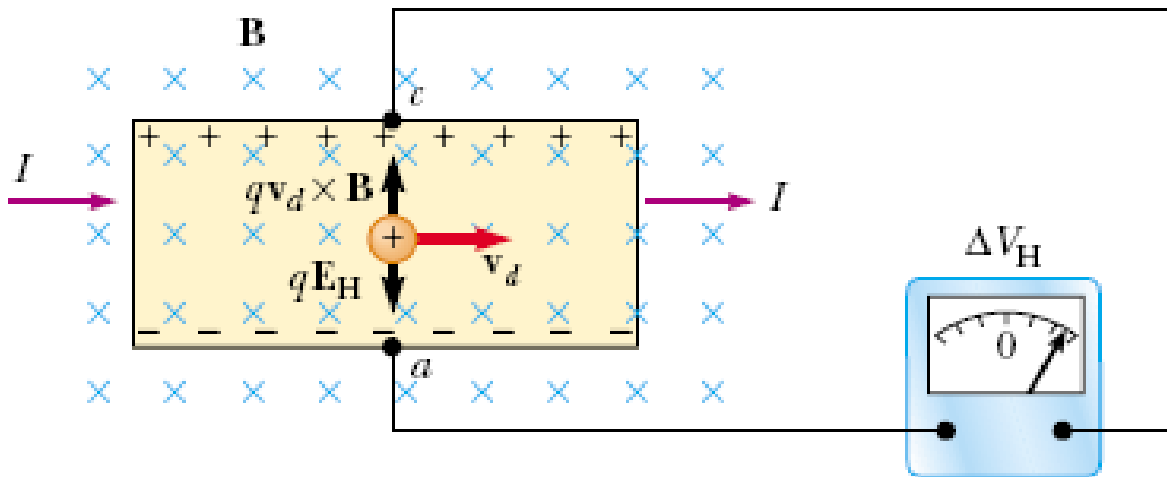
$$qE_H = q \frac{\Delta V_H}{d} = qv_d B;$$

$$\Delta V_H = \underbrace{qn}_{J} v_d B d =$$

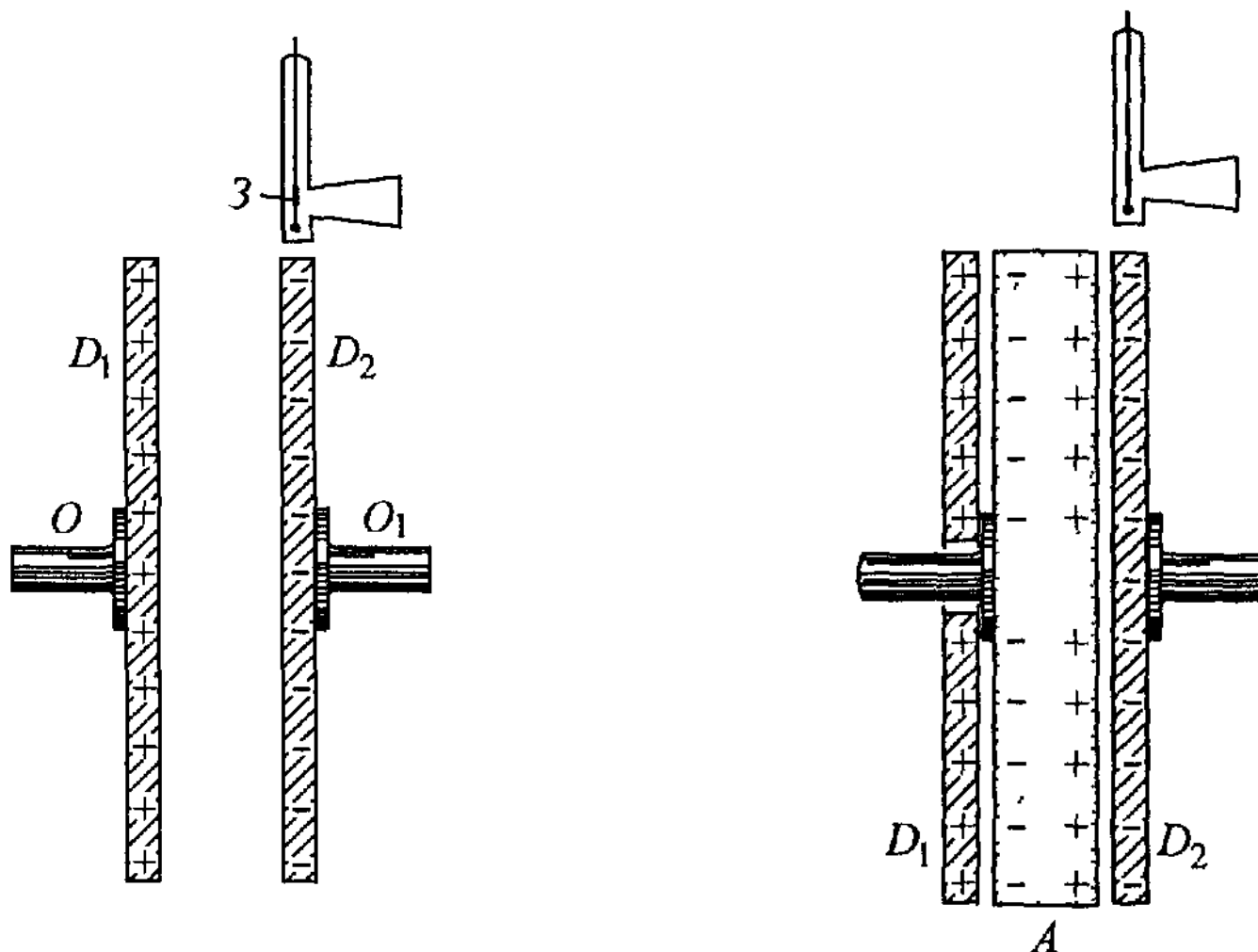
$$= \frac{1}{qn} J B d = R J B d,$$

где $R = \frac{1}{qn}$ -

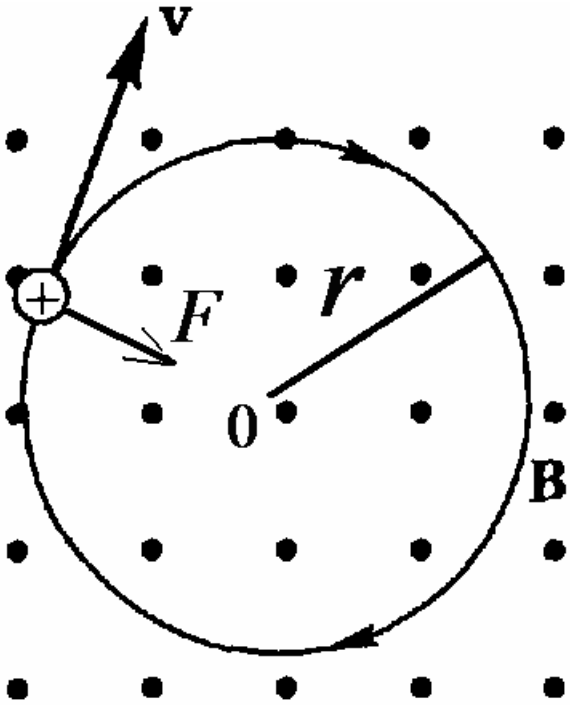
постоянная Холла.



Опыты Роулонда и Эйхенвальда. (А.А.Эйхенвалд, 1901 г.)



Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.

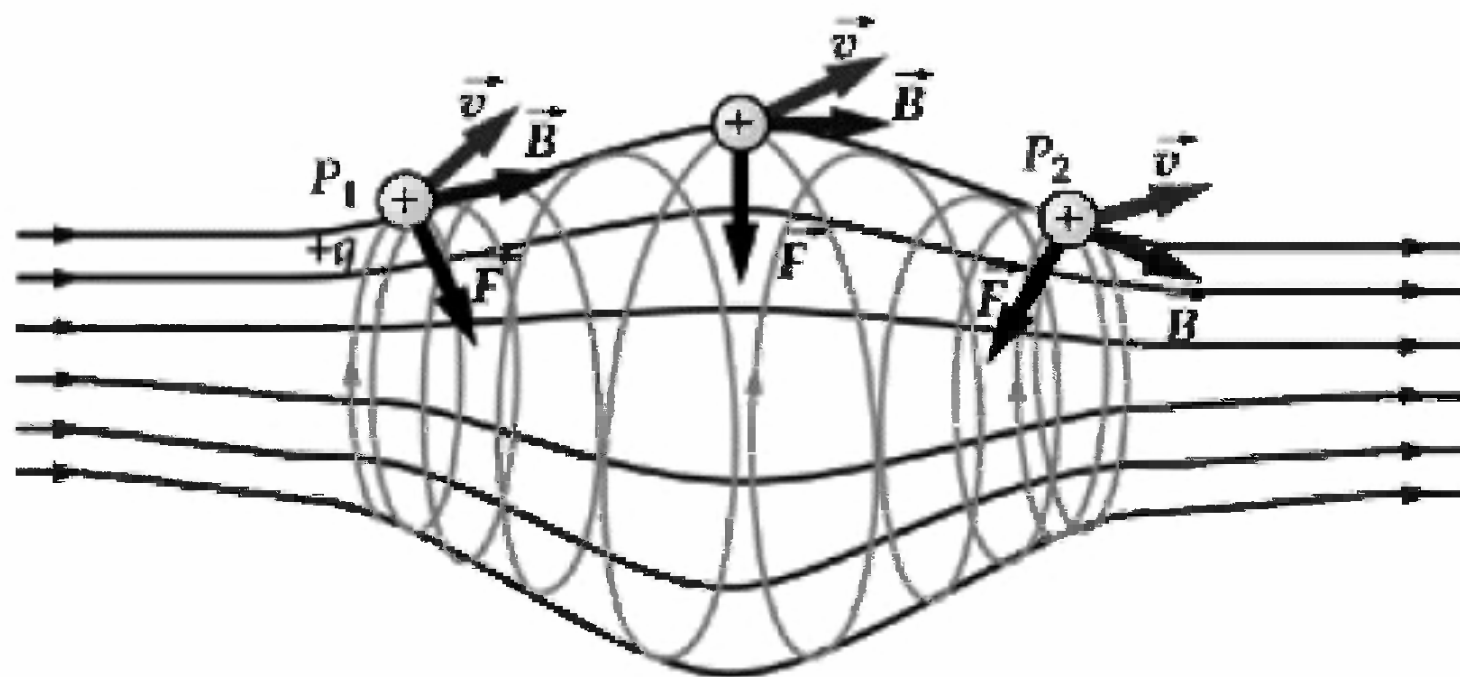
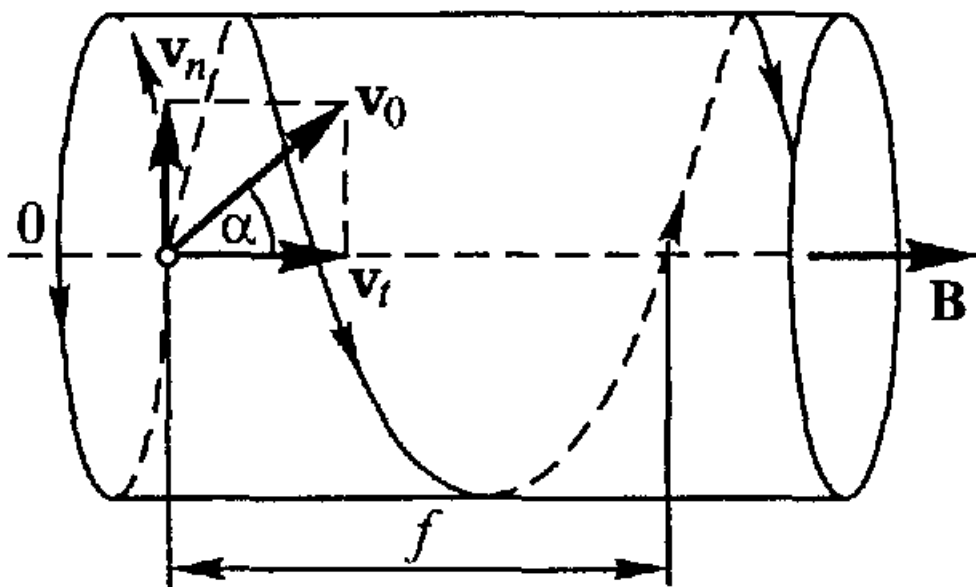


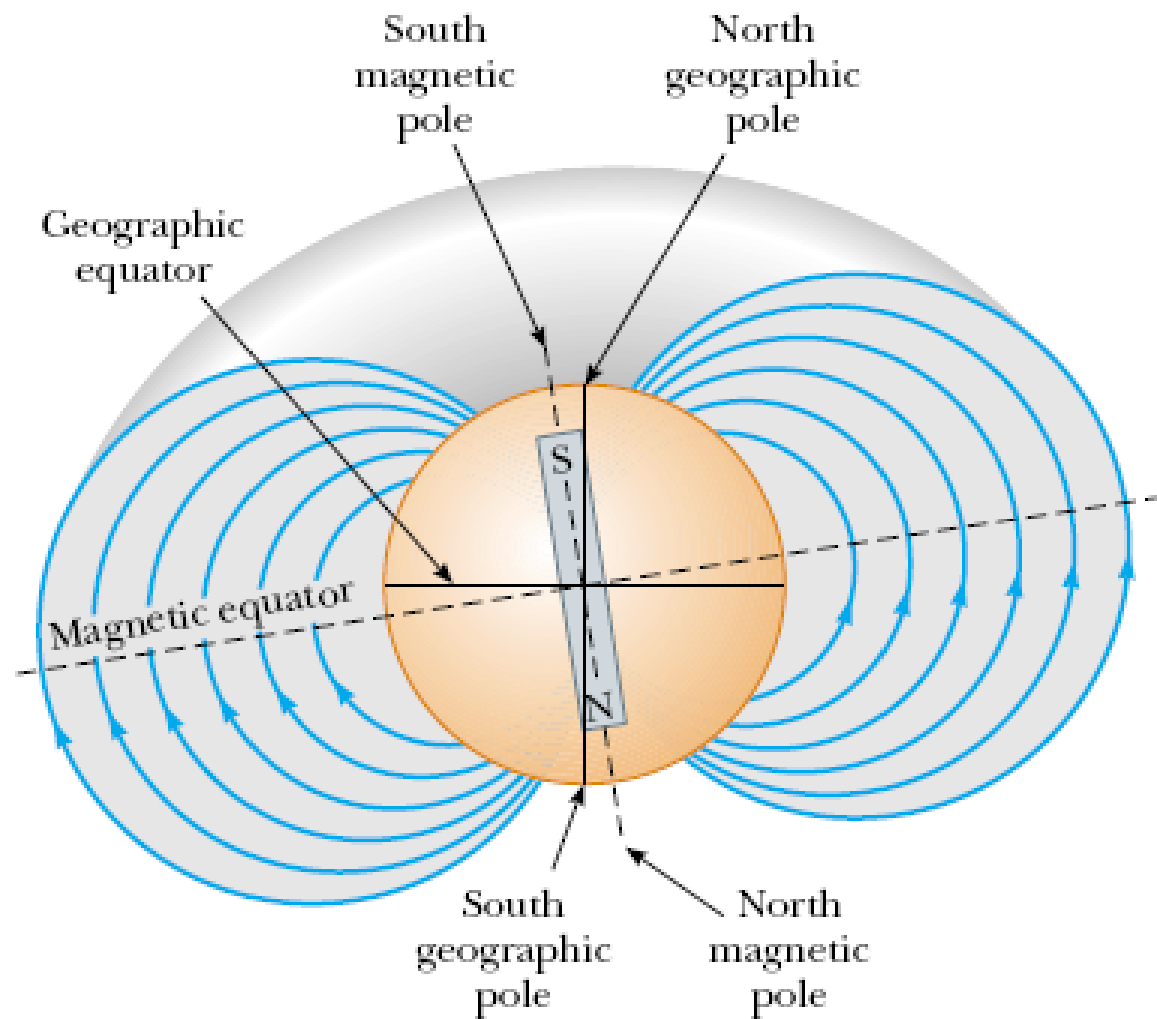
$$F = qvB;$$

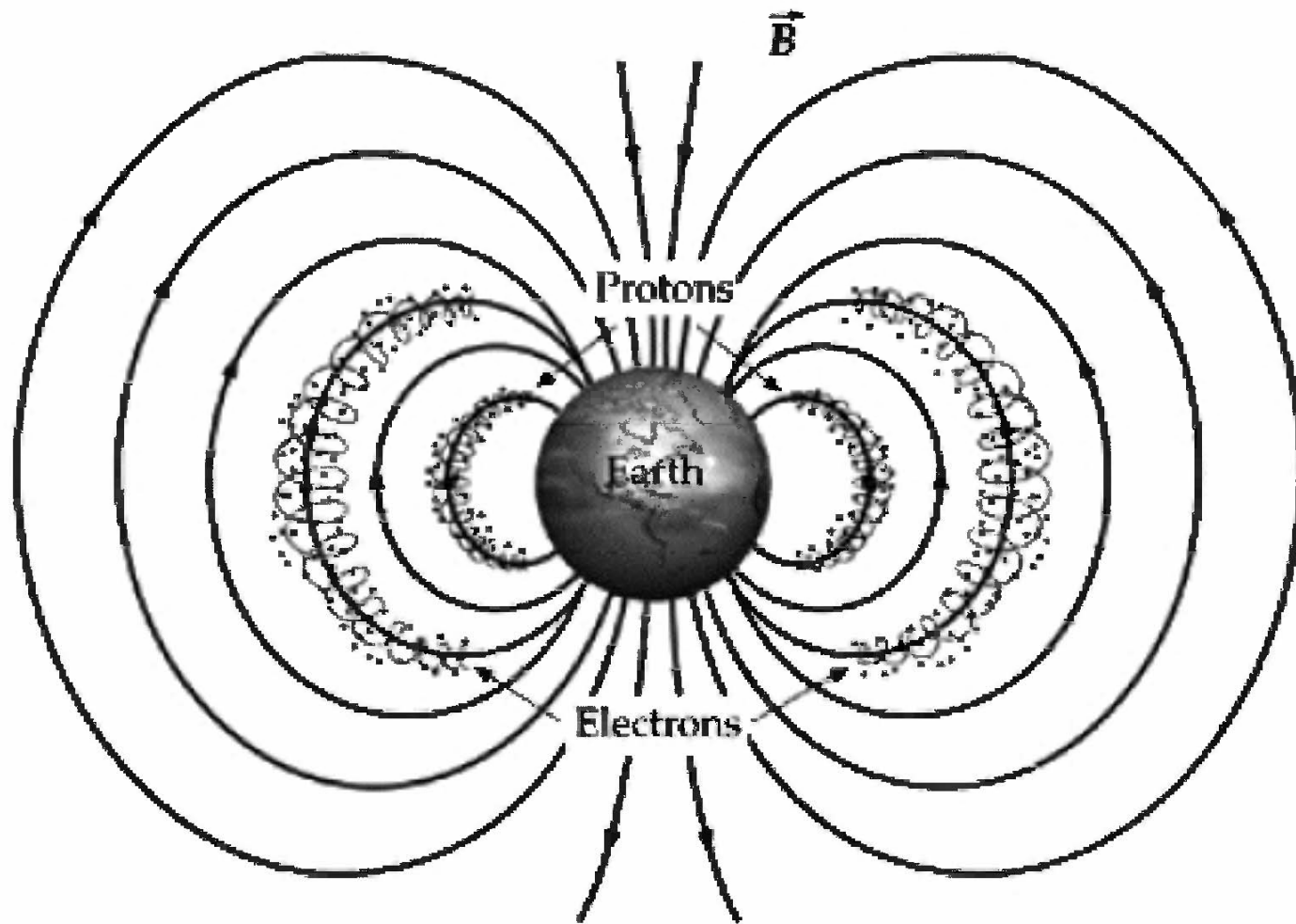
$$m \frac{v^2}{r} = qvB; \Rightarrow r = \frac{mv}{qB};$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB};$$

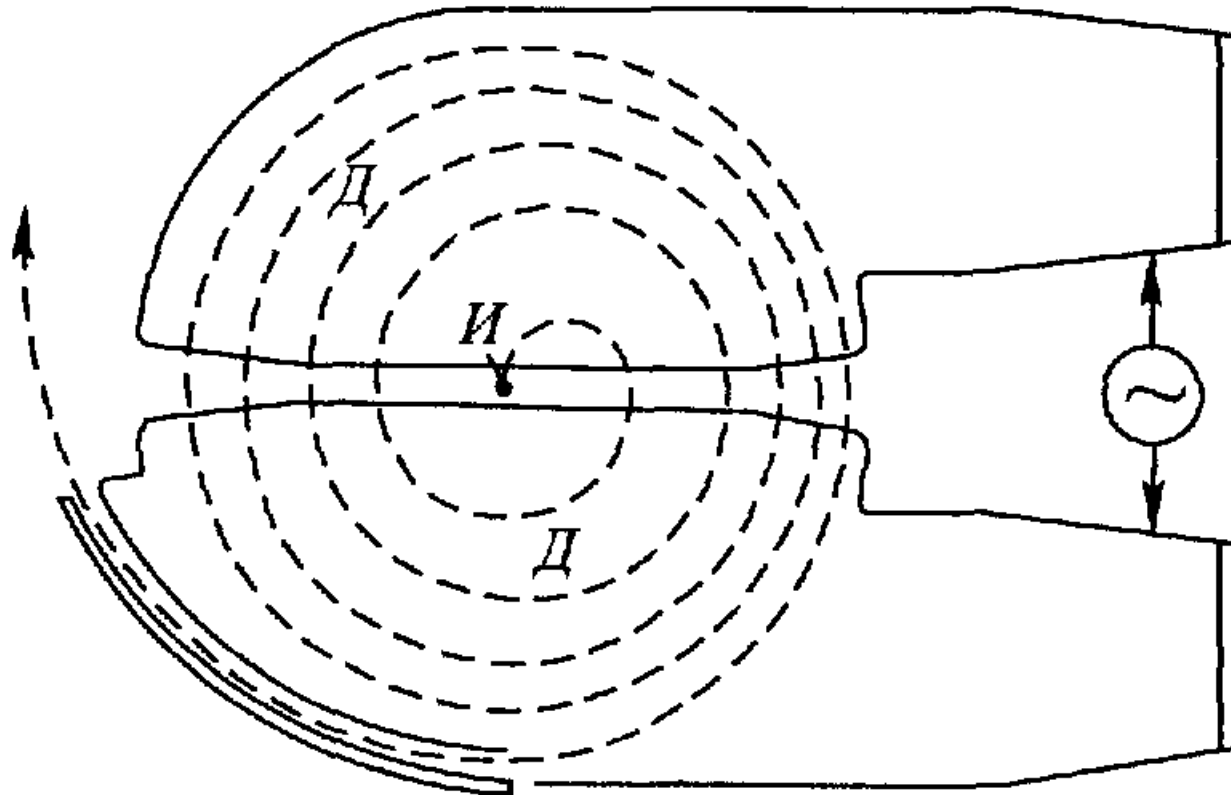
$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m} B.$$



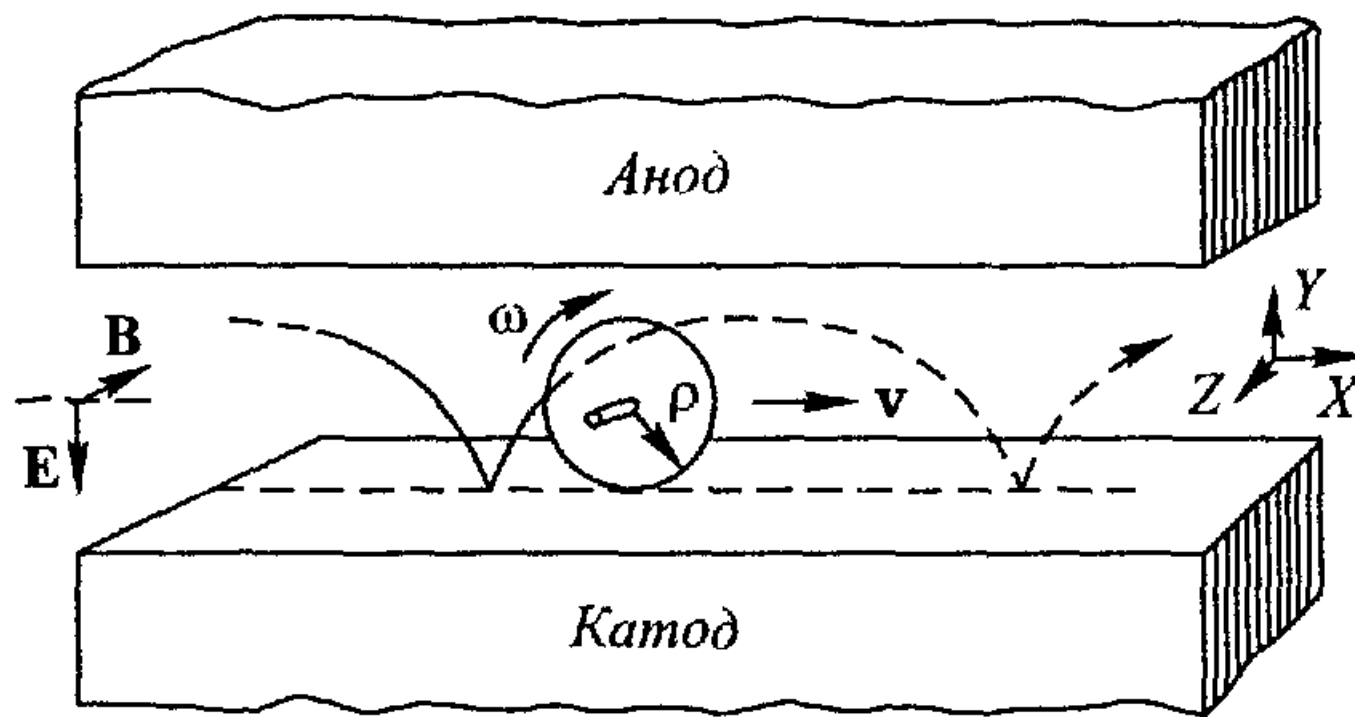


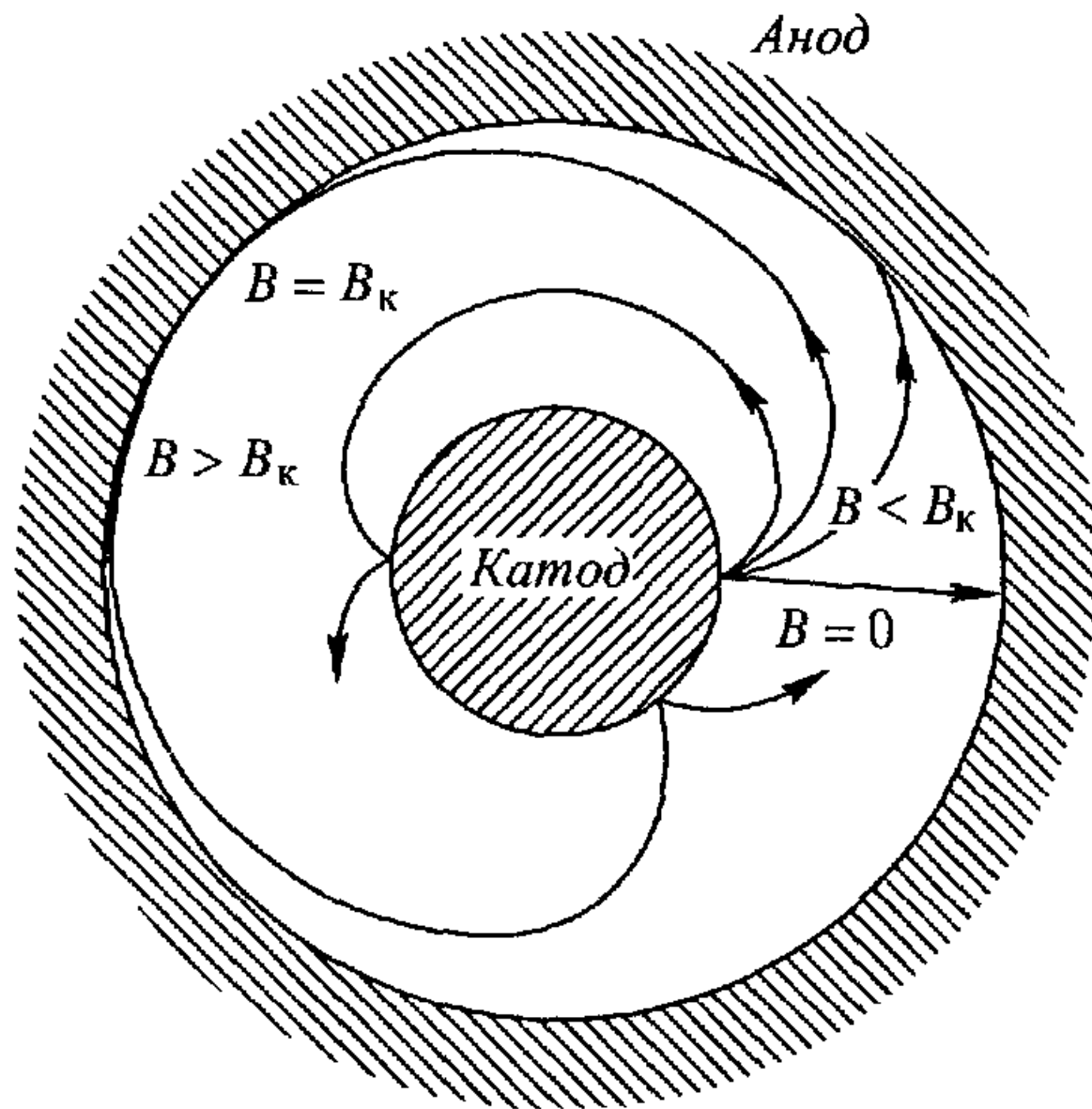


Принцип действия циклотрона

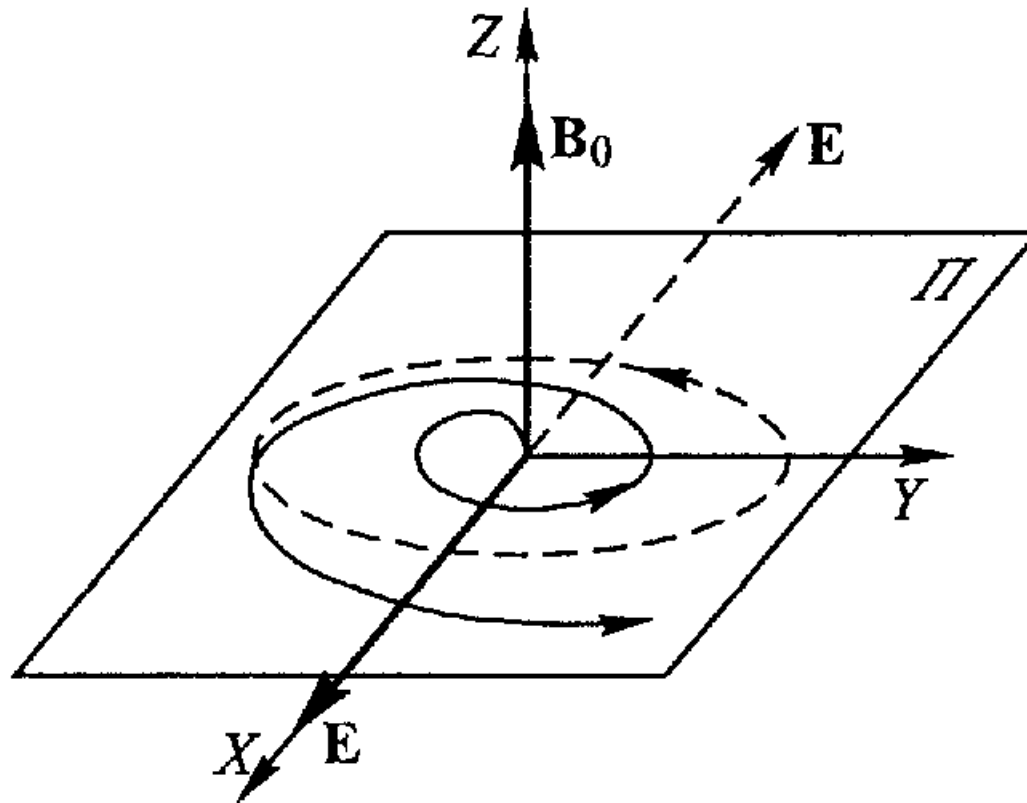


Магнетрон





Циклотронный резонанс.



In an experiment designed to measure the magnitude of a uniform magnetic field, electrons are accelerated from rest through a potential difference of 350 V. The electrons travel along a curved path because of the magnetic force exerted on them, and the radius of the path is measured to be 7.5 cm.

