

Лекция 10.

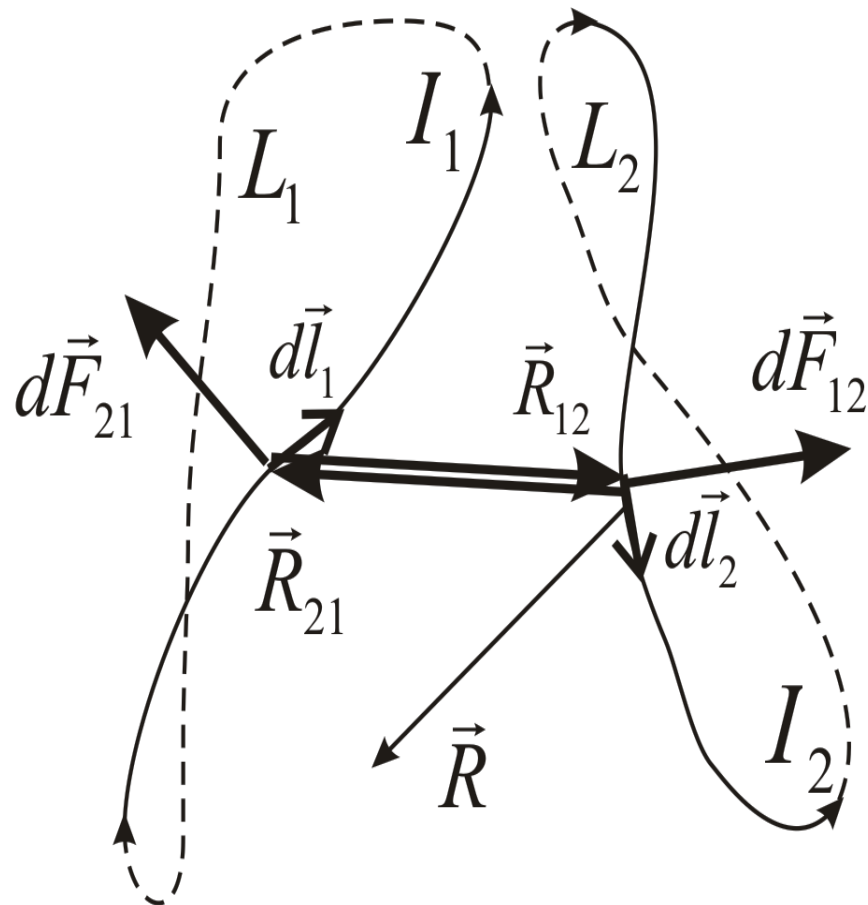
- Электромагнетизм. Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока. Закон Био – Савара – Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции магнитного поля.
- Действие магнитного поля на ток. Закон Ампера.
- Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции. Вихревой характер магнитного поля. Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Понятие о векторном потенциале.

Магнитное взаимодействие.

- Исторически под магнитным взаимодействием понималось взаимодействие между намагниченным телом (намагниченный кусок железа) с другими железными телами. В 1820 году Х.К.Эрстед обнаружил, что магнитное взаимодействие может оказывать электрический ток. Поэтому под магнитными взаимодействиями понимается взаимодействие между токами, магнитными телами, токами и магнитными телами. В рамках представлений близкодействия это взаимодействие осуществляет магнитное поле. Почти одновременно с Эрстедом Закон взаимодействия стационарных токов был открыт благодаря исследованиям Ампера, Био, Савара и Лапласа.

Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока.

- Магнитостатика изучает законы взаимодействия между неподвижными магнитными телами и проводниками со стационарными токами.



$I d\vec{l}_1$ - элемент тока.

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{[I_1 d\vec{l}_1, [I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3};$$

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, [I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3}.$$

$$\vec{F}_{21} = k \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{[I_1 d\vec{l}_1, [I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3};$$

$$\vec{F}_{12} = \int_{L_2} \int_{L_1} k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, [I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3}.$$

Отметим, что $d\vec{F}_{21} \neq -d\vec{F}_{12}$, однако для замкнутых токов $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

В абсолютной магнитной (электромагнитной) системе единиц СГСМ единица силы тока или заряда выбирается из условия $k = 1$ и обозначается 1СГСМ_I . Отношение

$$\frac{1\text{СГСЭ}_I}{1\text{СГСМ}_I} = c - \text{электродинамическая постоянная,}$$

равная скорости света $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$. В системе

единиц СИ
$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}.$$

$$d\vec{F}_{21} = [I_1 d\vec{l}_1, \underbrace{k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]}{R_{21}^3}}_{d\vec{B}_2}]; \quad d\vec{F}_{12} = [I_2 d\vec{l}_2, \underbrace{k \frac{[I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]}{R_{12}^3}}_{d\vec{B}_1}].$$

Закон Био-Савара-Лапласа и его полевая

трактовка. Вектор индукции магнитного поля.

С точки зрения полевой трактовки взаимодействия токов величину

$$d\vec{B}_2 = k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]}{R_{21}^3}$$

можно интерпретировать как силовую характеристику магнитного поля, создаваемого элементом тока $I_2 d\vec{l}_2$ в пространственной точке, определяемой $\vec{R}_{21}$. Эта величина называется вектором индукции магнитного поля элемента тока $I_2 d\vec{l}_2$ в точке $\vec{R}_{21}$.

В произвольной точке пространства $\vec{R}$ элемент тока $I_2 d\vec{l}_2$ создаст магнитное поле с индукцией $d\vec{B}$, равной

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}]}{R^3}.$$

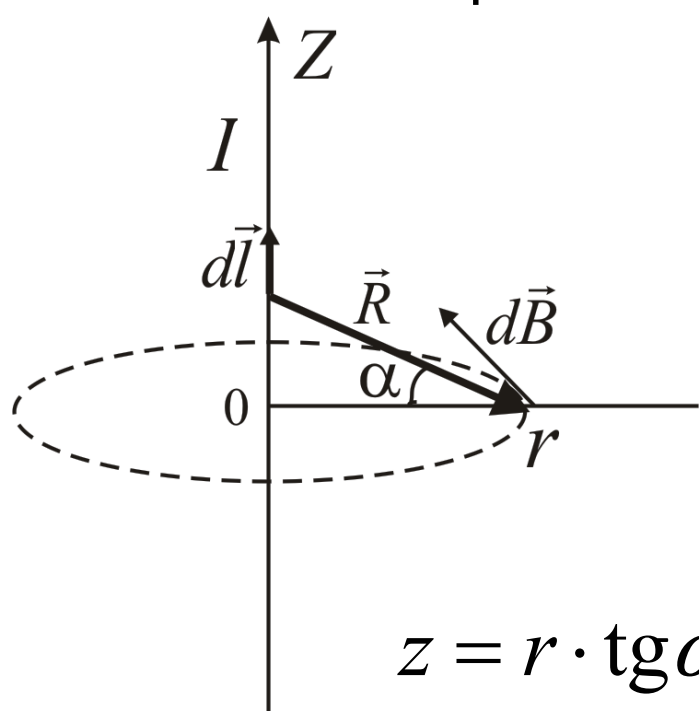
Эта формула получила название закона Био-Савара-Лапласа.

Величина индукции магнитного поля $\vec{B}_2$ в точке $\vec{R}_{21}$, создаваемого током всего контура L_2 , согласно принципу суперпозиции равна

$$\vec{B}_2 = \sum d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_2} \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]}{R_{21}^3}.$$

Тогда сила действия магн. поля $\vec{B}_2$ на элемент тока $I_1 d\vec{l}_1$ равна: $d\vec{F}_{21} = [I_1 d\vec{l}_1, \vec{B}_2]$ - закон Ампера (сила Ампера).

Пример расчета индукции магнитного поля с помощью закона Био-Савара-Лапласа.



$$|d\vec{l}| = dz, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3};$$

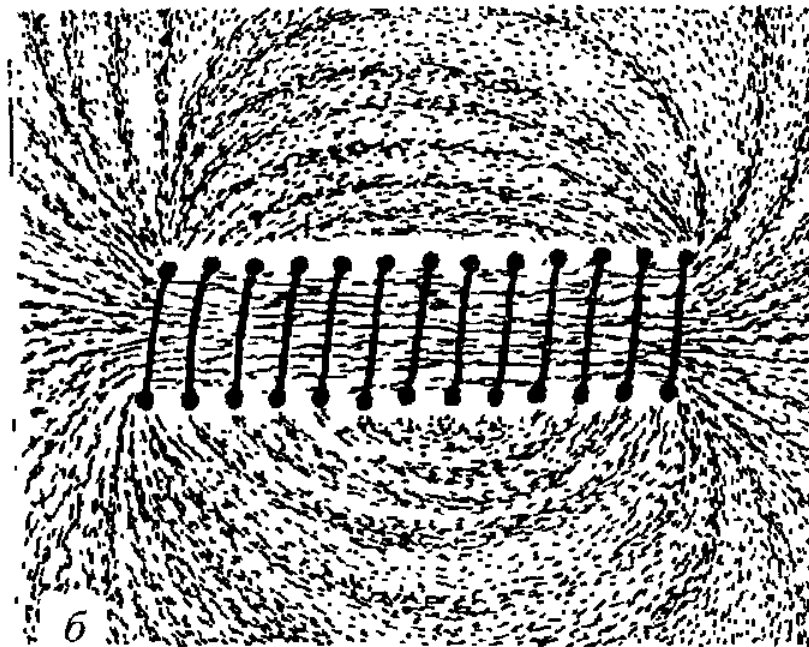
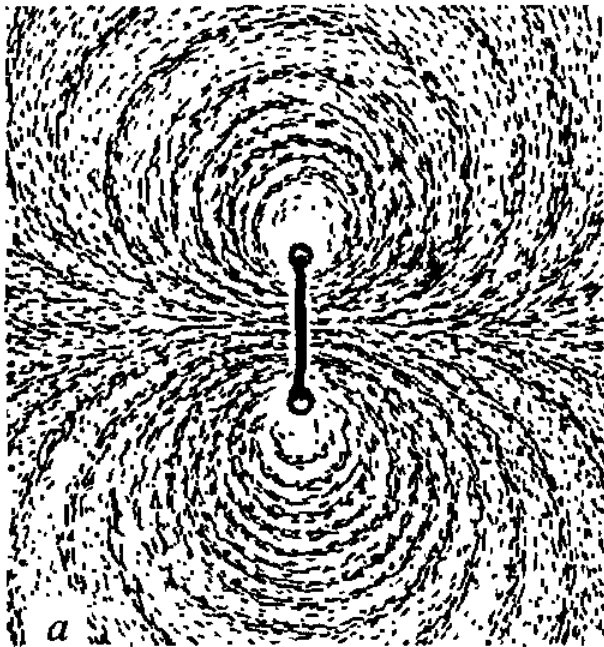
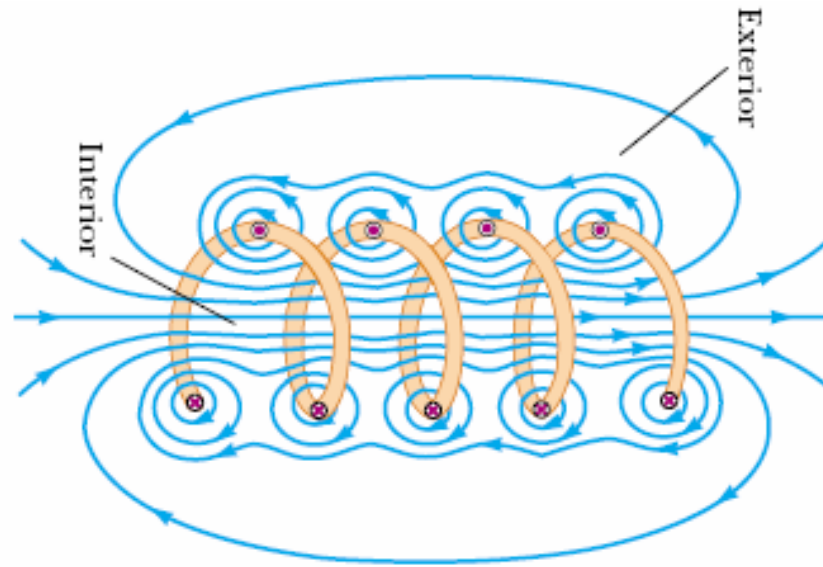
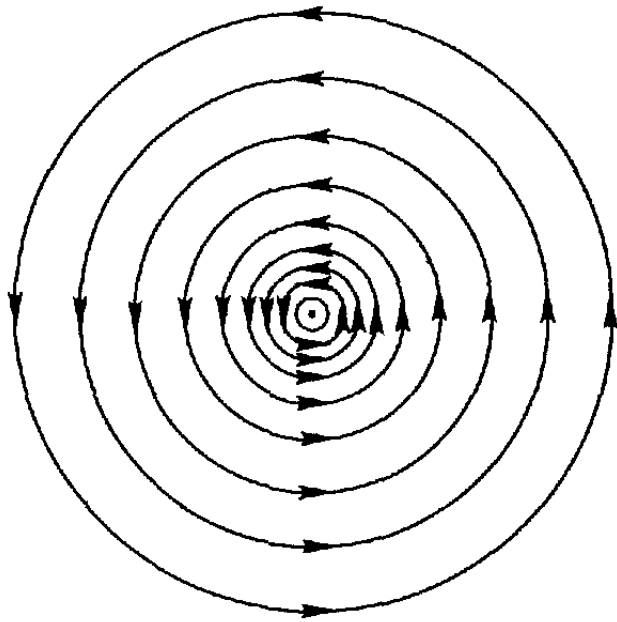
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \cdot R \cdot \overbrace{\sin(\alpha + 90^\circ)}^{\cos \alpha}}{R^3}.$$

$$z = r \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad dz = r \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \quad R \cos \alpha = r.$$

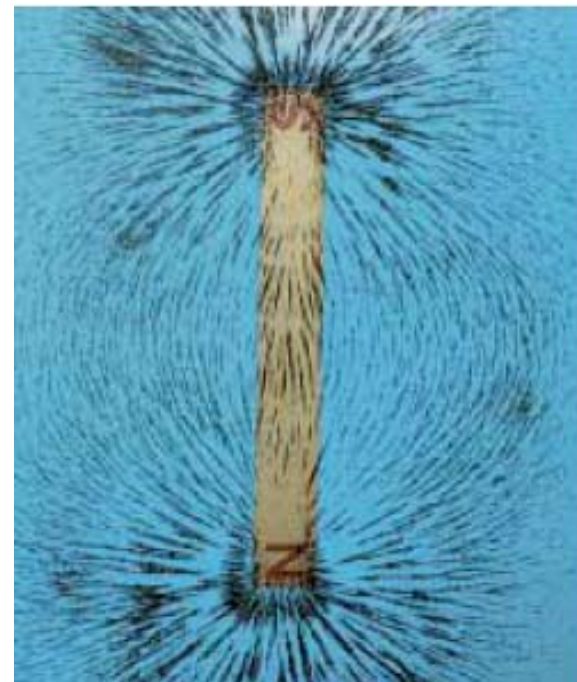
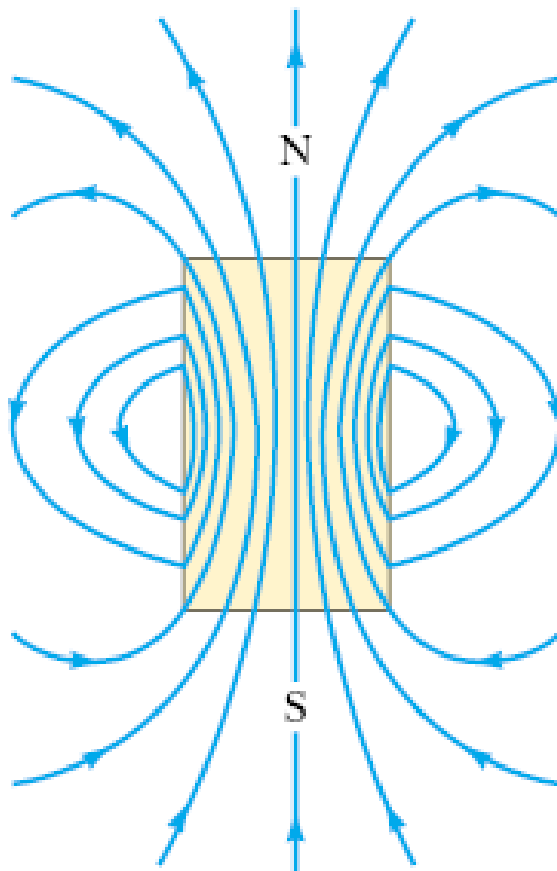
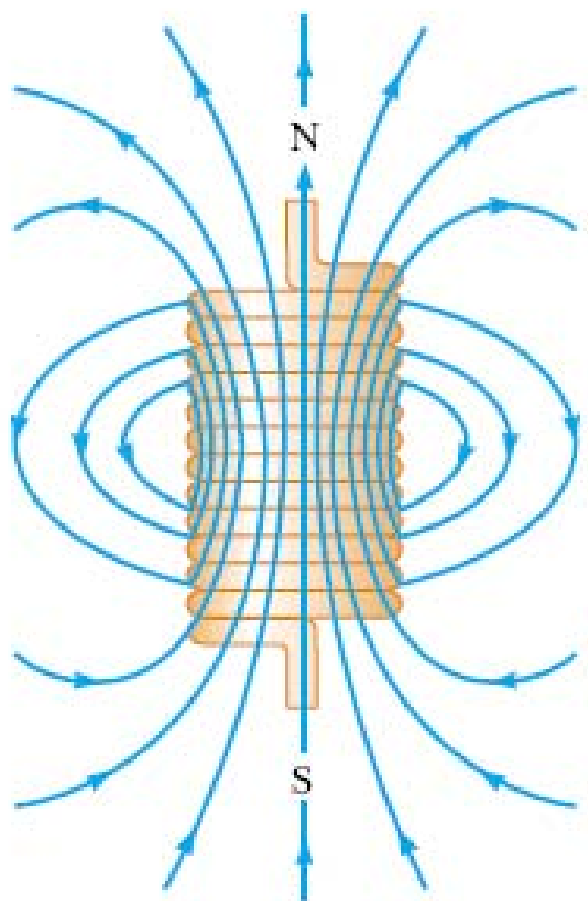
$$B = \int dB = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\infty \frac{R \cos \alpha}{R^3} dz = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{R^2} r \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha =$$

$$= 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r};$$

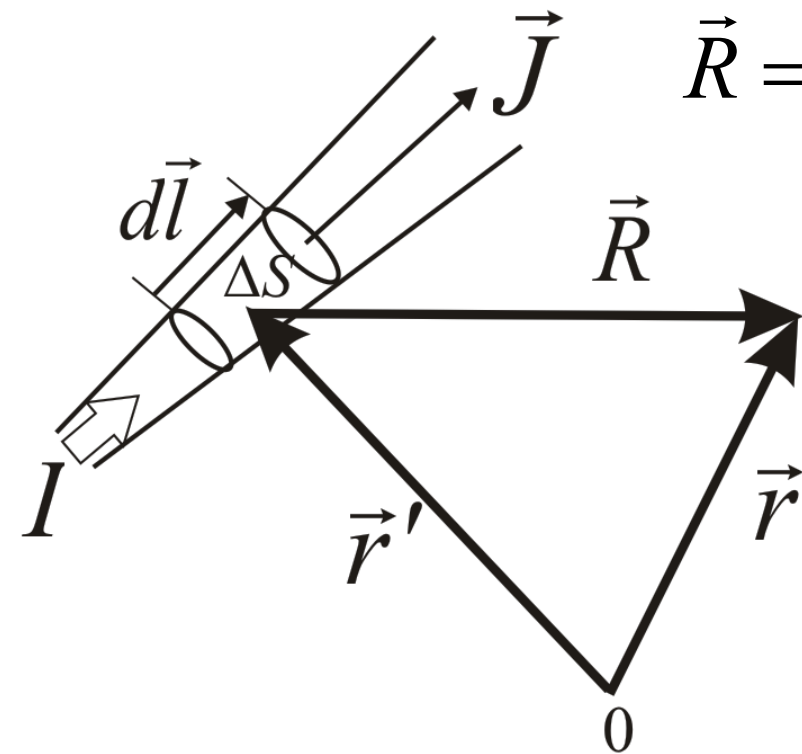
Линии индукции магнитного поля



Линии магнитной индукции соленооида и полосового магнита идентичны.



Закон Био-Савара-Лапласа для элемента объемного тока.



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad I d\vec{l} = \vec{J} \underbrace{\Delta S d\vec{l}}_{\Delta V} = \vec{J} \Delta V.$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{J}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} \Delta V;$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{J}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

Векторный потенциал магнитного поля тока.

$$\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{\underbrace{R}_{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = -\frac{\vec{R}}{|R|^3}; \quad \left(\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{1/2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \frac{2(x-x')}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{3/2}} \end{aligned} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\vec{J}(\vec{r}'), \frac{\vec{R}}{|R|^3}] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R}, \vec{J}(\vec{r}')] dV'$$

$$[\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R}, \vec{J}(\vec{r}')] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{J_x}{R} & \frac{J_y}{R} & \frac{J_z}{R} \end{vmatrix} = [\nabla, \frac{\vec{J}}{R}] = \text{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}}{R};$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}}{R} dV' = \text{rot}_{\vec{r}} \underbrace{\int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{R} dV'}_{\vec{A}(r)} = \text{rot } \vec{A};$$

$$\vec{A}(r) = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{R} dV' - \left(\begin{array}{l} \text{векторный потенциал} \\ \text{магнитного поля } \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \end{array} \right)$$

1) Представление $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ неоднозначно,

$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$, так как $\text{rot}(\text{grad } \varphi) \equiv 0$.

Вихревой характер магнитного поля.

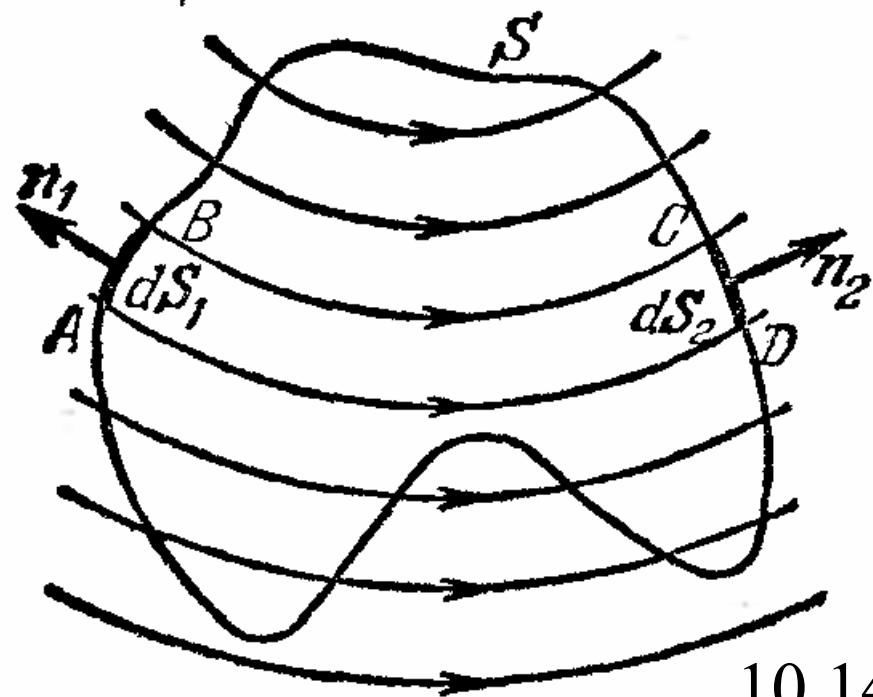
2) $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) \equiv 0$, так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \equiv 0,$$

то есть магнитное поле вихревое поле.

По формуле Гаусса

$$\int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = 0.$$



$$\begin{aligned}
3) \operatorname{div}_{\vec{r}} \vec{A} &= \operatorname{div}_{\vec{r}} \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\operatorname{div}_{\vec{r}'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\operatorname{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}')}_{\substack{0 \text{ для} \\ \text{стационарного тока}}} \right) dV' = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_V} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{S}' = 0, \text{ так как } J_n = 0.
\end{aligned}$$

Имеем $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Уравнение для векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad \text{Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет эта функция?}$$

Аналогия с электростатикой

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$A(\vec{r})_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(\vec{r}')_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \Rightarrow \Delta A_x = -\mu_0 J_x;$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}.$$

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в дифференциальной и интегральной форме.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{A}}_0 - \underbrace{\Delta \vec{A}}_{-\mu_0 \vec{J}} = \mu_0 \vec{J};$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \begin{cases} \text{Дифференциальная форма теоремы о} \\ \text{циркуляции вектора магнитной индукции.} \end{cases}$$

По формуле Стокса

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S_L} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \sum_{S_L} I;$$

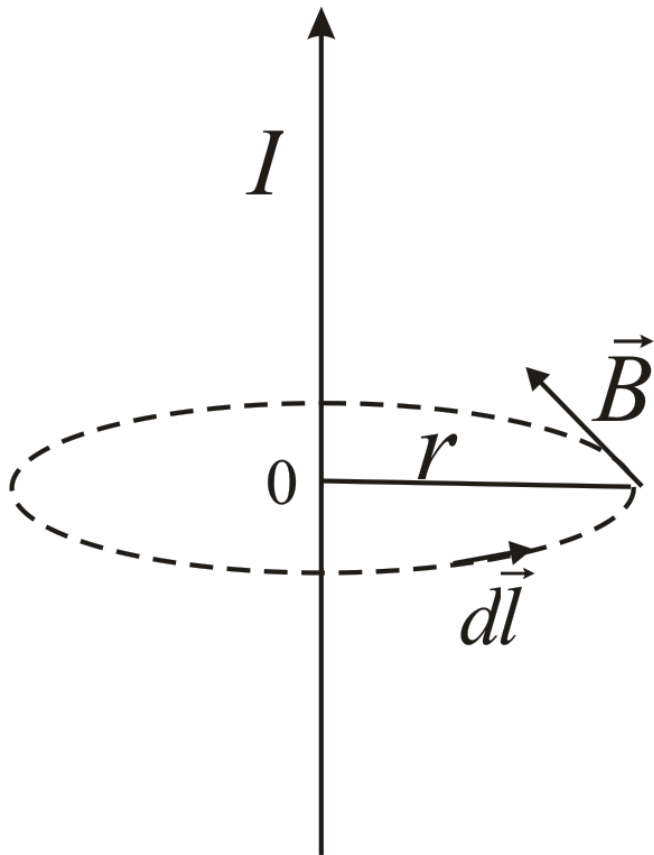
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S}; \begin{cases} \text{Интегральная форма теоремы о цир-} \\ \text{куляции вектора магнитной индукции.} \end{cases}$$

Система полевых уравнений магнитостатики в вакууме в дифференциальной и интегральной формах.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0, \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}, \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Система полевых уравнений} \\ \text{электростатики в вакууме} \end{array} \right.$$

Пример решения задач магнитостатики с помощью теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

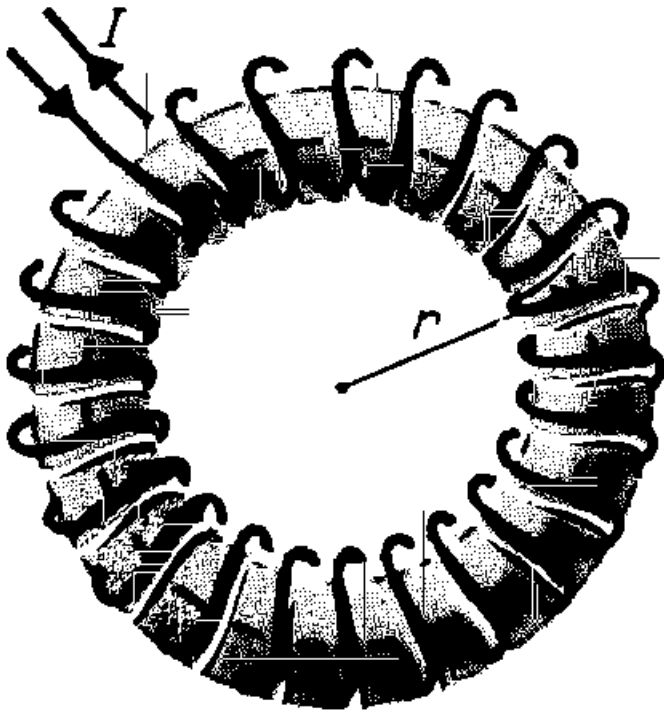


$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{S_L} I;$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Магнитное поле тороида



$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I;$$

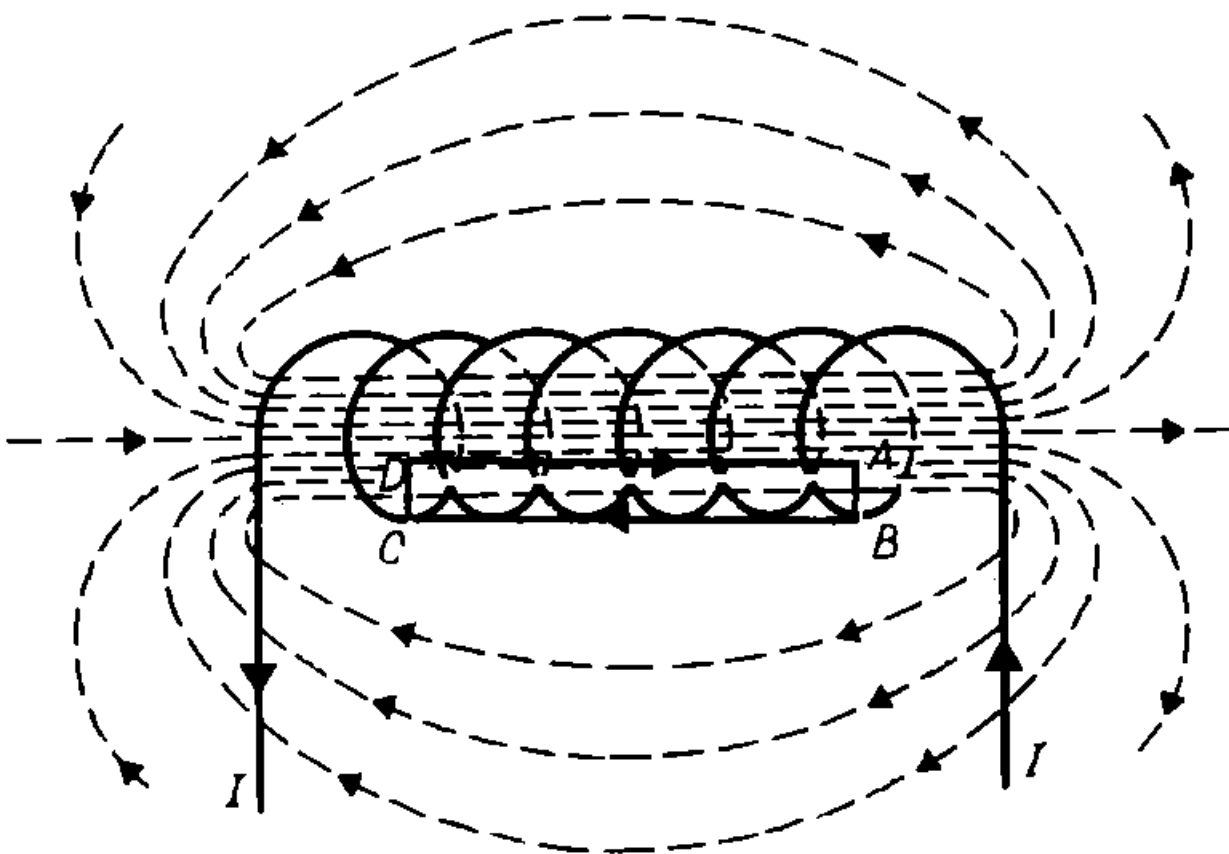
$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 n I.$$

Магнитное поле соленоида

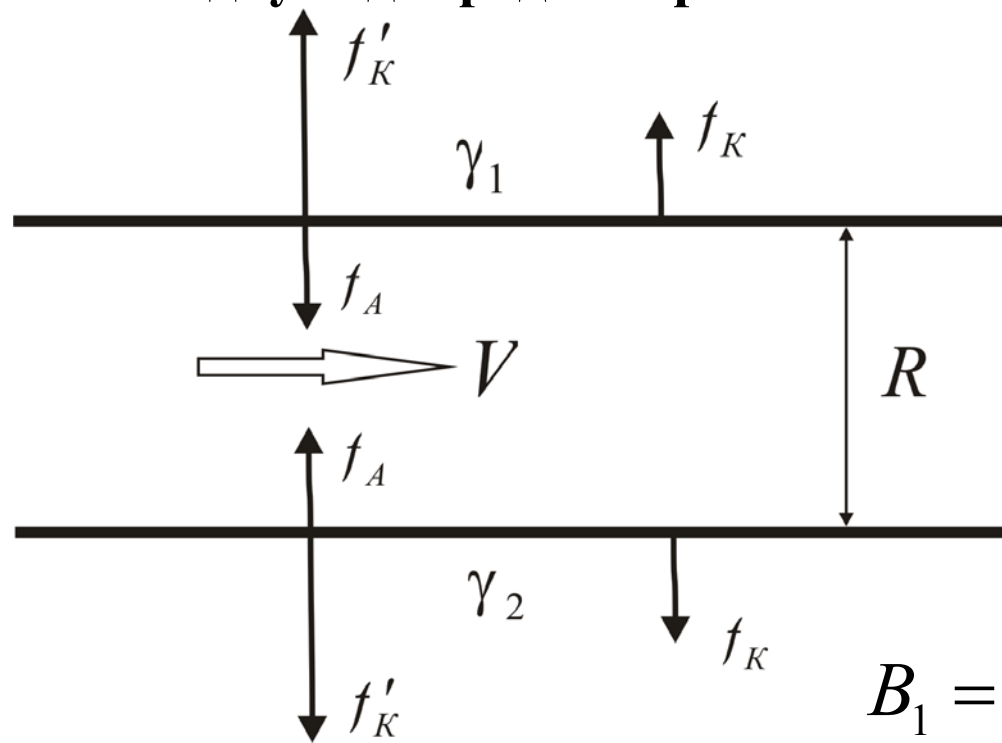
$$\oint_{ABCL} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 N I;$$

$$B l = \mu_0 N I;$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I.$$



Релятивистская природа магнитных взаимодействий на примере взаимодействия двух однородно заряженных тонких бесконечных стержней.



$$E = \frac{1}{2\pi R} \frac{\gamma_2}{\varepsilon_0};$$

$$f_K = \gamma_1 \cdot E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma_1\gamma_2}{R};$$

$$I_1 = \gamma_1 V; I_2 = \gamma_2 V;$$

$$B_1 = \frac{1}{2\pi R} \mu_0 I_1; B_2 = \frac{1}{2\pi R} \mu_0 I_2;$$

$$f_A = I_1 B_2 = I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2; \quad f = f_K - f_A =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} (1 - \varepsilon_0 \mu_0 V^2) < f_K;$$

На самом деле из-за релятивистских эффектов $f'_K > f_K$,

так как $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, то $\gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$; $\gamma'_2 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$.

$f = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_1\gamma_2}{R} \frac{(1 - \epsilon_0\mu_0 V^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$. Если $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$,
то $f = f'_K - f_A = f_K$.

$$f_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1\gamma_2}{R} V^2 = \underbrace{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_1\gamma_2}{R}}_{f_K} \underbrace{\epsilon_0\mu_0}_{\frac{1}{c^2}} V^2 = f_K \frac{V^2}{c^2}.$$

Сила Ампера является релятивистской поправкой
 $\sim V^2 / c^2$ к статической силе Кулона.