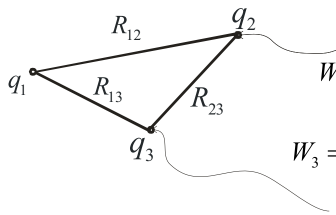
Лекция 6.

- Энергия системы электрических зарядов. Энергия взаимодействия и собственная энергия. Энергия электростатического поля и её объемная плотность. Энергия электрического диполя во внешнем поле.
- Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов.

Энергия системы электрических зарядов.



$$W_2 = q_2\varphi_2 = k\frac{q_2q_1}{R_{12}},$$

$$W_3 = q_3\varphi_3 = k\frac{q_3q_1}{R_{13}} + k\frac{q_3q_2}{R_{23}},$$

$$W = W_2 + W_3 = k\left(\frac{q_1q_2}{R_{12}} + \frac{q_1q_3}{R_{13}} + \frac{q_2q_3}{R_{23}}\right),$$

$$W = k\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{q_iq_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i, \text{ где } \varphi_i = k\sum_j\frac{q_j}{R_{ij}},$$

Энергия взаимодествия зарядов при наличии диэлектриков

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i, \text{ но } \varphi_i \neq k\sum_j\frac{q_i}{R_{ij}}.$$

Энергия взаимодествия зарядов при непрерывном распределении зарядов

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV.$$

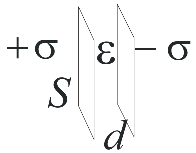
Пример. Энергия конденсатора.

$$W = \frac{1}{2}q_1\varphi_1 + \frac{1}{2}q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}q_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}q_1U = \frac{cU^2}{2}.$$

Энергия системы заряженных проводников

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\varphi_j\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}q_iq_j.$$

Энергия электростатического поля и её объемная плотность.



$$W = \frac{1}{2}cU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}(Ed)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon E}_{D}\cdot E\cdot\underbrace{Sd}_{V} = \frac{DE}{2}V.$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}.$$

Строгий вывод формулы для плотности энергии электростатического поля

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV = \frac{1}{2}\int_\infty \rho\varphi dV = \frac{1}{2}\int_\infty (\operatorname{div}\vec{D})\varphi dV =$$

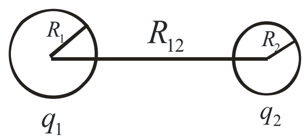
$$= \frac{1}{2}\int_\infty \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial D_i}{\partial x_i}\right)\varphi dV = \frac{1}{2}\int_\infty\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(D_i\varphi)}{\partial x_i}}_{\operatorname{div}(\varphi\vec{D})} - \underbrace{\sum_{i=1}^{3}D_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}_{-\vec{D}\vec{E}}\right)dV =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_{S_{R\to\infty}}\varphi\vec{D}d\vec{S}}_{\to 0} + \frac{1}{2}\int_\infty \vec{D}\vec{E}dV = \int_\infty wdV, \text{ где } w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}.$$

Энергия взаимодействия и собственная энергия.

- Собственная энергия заряженного тела- это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов данного тела друг с другом.
- Энергия взаимодействия двух заряженных тел - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов одного тела с зарядами другого тела.

Рассмотрим для простоты два заряженных проводящих шара



Для уединенных шаров

$$W_1^{собст.} = \frac{q_1\varphi_1}{2},\ W_2^{собст.} = \frac{q_2\varphi_2}{2}.$$

Для взаимодействующих шаров

$$\varphi_1 = \varphi_1^{q_1} + \varphi_1^{q_2},\ \varphi_2 = \varphi_2^{q_1} + \varphi_2^{q_2}.\ W = \frac{1}{2}q_1\varphi_1 + \frac{1}{2}q_2\varphi_2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_1}}_{W_1^{собст.}} + \underbrace{\frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_2}}_{W_2^{собст.}} + \underbrace{\frac{1}{2}q_1\varphi_1^{q_2} + \frac{1}{2}q_2\varphi_2^{q_1}}_{W_{взаимодействия}}.$$

В рамках полевого формализма

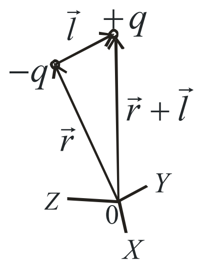
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$W = \int_\infty \frac{\varepsilon_0(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2}dV =$$

$$= \underbrace{\int_\infty\frac{\varepsilon_0\vec{E}_1^{\,2}}{2}dV}_{W_1^{собст.}} + \underbrace{\int_\infty\frac{\varepsilon_0\vec{E}_2^{\,2}}{2}dV}_{W_2^{собст.}} + \underbrace{\int_\infty\varepsilon_0\vec{E}_1\vec{E}_2dV}_{U^{взаимод.}}.$$

При $R_{1,2}\to 0,\quad W_{1,2}^{собст.}\to\infty;\quad U^{взаимод.} \leq$ или >0.

Энергия электрического диполя во внешнем поле.



$$W = q\varphi(\vec{r}+\vec{l}) - q\varphi(\vec{r}),$$

$$\varphi(\vec{r}+\vec{l}) = \varphi(x+l_x, y+l_y, z+l_z) =$$

$$= \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}l_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}l_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z + \cdots,$$

$$W = \underbrace{q\vec{l}}_{\vec{p}}\cdot\underbrace{\nabla\varphi}_{-\vec{E}} = -\vec{p}\vec{E}.$$

Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Силы, действующие на диполь.

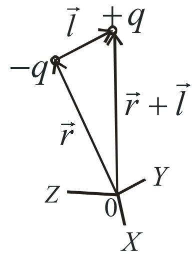
$$\vec{F} = -\nabla W; \qquad F_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{p}\vec{E} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3} p_j E_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3} p_j\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(p_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right); \Rightarrow \vec{F} = (\vec{p}\nabla)\cdot\vec{E};$$

6.10

Момент силы, действующей на диполь



$$\vec{M} = \left[\vec{r}+\vec{l}, q\vec{E}(\vec{r}+\vec{l})\right] - \left[\vec{r}, q\vec{E}(\vec{r})\right],$$

В однородном поле $\vec{E} = const$, тогда

$$\vec{M} = \left[\vec{l}, q\vec{E}\right] = \left[q\vec{l}, \vec{E}\right] = \left[\vec{p}, \vec{E}\right].$$

6.11

Объемная плотность силы, действующая на диэлектрик

Дипольный момент объема диэлектрика $\vec{p}_{\Delta V}$ выражается через вектор поляризации $\vec{P}$

$\vec{p}_{\Delta V} = \vec{P}\Delta V$, тогда плотность силы

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}_{\Delta V}}{\Delta V} = \frac{(\vec{p}_{\Delta V}\cdot\nabla)\vec{E}}{\Delta V} = (\underbrace{\vec{P}}_{\vec{P}=\varepsilon_0\alpha\vec{E}}\cdot\nabla)\vec{E} = \varepsilon_0\alpha(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E};$$

$$f_i = \varepsilon_0\alpha\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \varepsilon_0\alpha\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}_{-E_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}_{-E_j} =$$

6.12

$$= \varepsilon_0\alpha\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{E_j^{\,2}}{2} = \varepsilon_0\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{E_j^{\,2}}{2} =$$

$$= \varepsilon_0\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\vec{E}^2}{2}.$$ Окончательно имеем

$$\vec{f} = \varepsilon_0\alpha\cdot\nabla\frac{E^2}{2} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\cdot\nabla\frac{E^2}{2}\ .$$

6.13

Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов

Если в системе поддерживается $T = const$, деформация среды не меняется и $\varepsilon = const$, то

$$dW = dW_{\substack{\text{энергия, поступившая}\\ \text{от внешних источников}}} + dA'_{\text{внешних сил}}.$$

Для квазистатических перемещений

$$dA'_{\text{внешних сил}} = -dA_{\text{электрического поля}} = -\sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i,$$

где ξ_i - обобщенные координаты, F_i - обобщенные силы.

$$dW_{\substack{\text{энергия, поступившая}\\ \text{от внешних источников}}} = \sum_j \varphi_j dq_j.$$

6.14

$$dW = \sum_j \varphi_j dq_j - \sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i\ .$$

1) Если $q_j = const$, то

$$\sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i = -dW(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) = -\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right|_{q_j=const} d\xi_i.$$

$$F_i = -\left.\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right|_{q_j=const}.$$

6.15

2) Если $\varphi_j = const$, то

$$dW = \frac{1}{2}\sum_j \varphi_j dq_j\ .$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} F_i d\xi_i = dW(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right|_{\varphi_j=const} d\xi_i.$$

$$F_i = \left.\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right|_{\varphi_j=const}.$$

6.16

Пример. Вычислить силу притяжения пластин плоского конденсатора, помещенного в жидкий диэлектрик, если $q = const$.

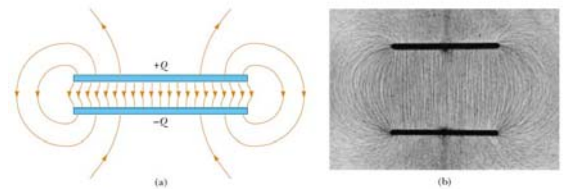
$$W = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\ ,$$

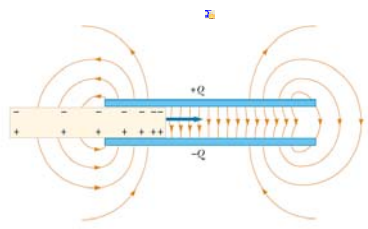
d - обобщенная kooрината.

$$F_d = -\left.\frac{\partial W}{\partial d}\right|_{q=const} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = -\frac{q}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = -\frac{q}{2}E\ .$$

В диэлектрике сила взаимодествия пластин уменьшилась в ε раз, то есть $F_d = F_d/\varepsilon$.

6.17





6.18