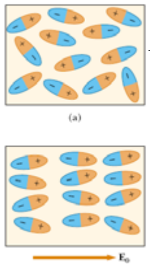
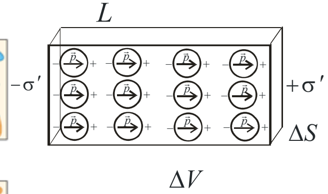
Лекция 5.

- Диэлектрики. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации. Связь вектора поляризации со связанными зарядами.
- Вектор электрической индукции в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость вещества. Материальное уравнение для векторов электрического поля.
- Теорема Остроградского – Гаусса для случая диэлектриков. Её дифференциальная форма.
- Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции.
- Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

5.1

Для характеристики поляризации диэлектрика вводят вектор поляризации





$$\vec P = \frac{\sum_i \vec p_i}{\Delta V},$$

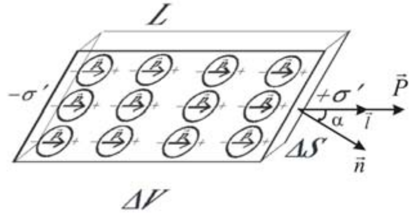
σ' - связанные заряды.

Из рисунка видно,что

$P_n \Delta V = \sigma' \Delta S L$, то есть $P_n = \sigma'$

5.2

Связь вектора поляризации с поверхностными связанными зарядами.

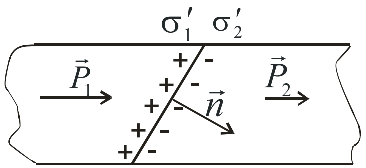


$$\vec p = q'L\vec l = \sigma'\Delta S L\vec l;$$

$$\vec p = \vec P\Delta V = \vec P\Delta S L\cos\alpha = \underbrace{(\vec P\vec n)}_{P_n}\vec l\,\Delta S L; \quad \Rightarrow \sigma' = (\vec P\vec n) = P_n;$$

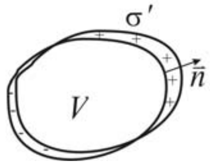
5.3

Для границы двух диэлектриков имеем $\sigma' = \sigma_1' - \sigma_2' = P_{1n} - P_{2n} = -\vec n(\vec P_2 - \vec P_1).$



5.4

Связь вектора поляризации с объемными связанными зарядами.



$$\oint_{S_V} \sigma' dS = -Q_V' = -\int_V \rho' dV;$$

$$\oint_{S_V} \sigma' dS = \oint_{S_V} \vec P\vec n dS = \oint_{S_V} \vec P d\vec S = \int_V \mathrm{div}\vec P dV;$$

$$\oint_{S_V} \vec P d\vec S = -Q_V', \qquad \mathrm{div}\vec P = -\rho'.$$

5.5

Для объемной плотности связанных зарядов справедливы соотношения

$$\oint_{S_V} \vec P d\vec S = -\int_V \rho' dV,$$

$$\mathrm{div}\vec P = -\rho'.$$

Вектор электрической индукци (смещения) в диэлектрике определяется равенством

$$\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P.$$

5.6

Материальное уравнение для векторов электрического поля.

$$\vec P = \vec P(\vec E) \quad \text{или} \quad \vec D = \vec D(\vec E).$$

Для многих сред эту связь можно представить в виде

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} E_j + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3}\sum_{\kappa=1}^{3} \alpha_{ijk} E_j E_k,$$

где α_{ij} – тезор линейной восприимчивости,

α_{ijk} – тезор нелинейной восприимчивости.

5.7

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость вещества.

Для изотропного диелектрика $\alpha_{ij} = \delta_{ij}\alpha$, тогда имеем

$$\vec P = \varepsilon_0 \alpha \vec E, \qquad \vec D = \varepsilon_0 \vec E + \varepsilon_0 \alpha \vec E = \varepsilon_0 \varepsilon \vec E,$$

где по определению $\varepsilon = 1 + \alpha$, – отнисительная диэлектрическая проницаемость вещества.

5.8

Теорема Остроградского – Гаусса для случая диэлектриков в дифференциальной и интегральной форме.

$$\mathrm{div}\vec D = \varepsilon_0 \underbrace{\mathrm{div}\vec E}_{\frac{\rho+\rho'}{\varepsilon_0}} + \underbrace{\mathrm{div}\vec P}_{-\rho'} = \rho;$$

Дифференциальная форма - $\mathrm{div}\vec D = \rho.$

Интегральная форма - $\int_{S_V} \vec D d\vec S = \int_V \rho dV.$

5.9

Система полевых уравнений электростатики в бесконечной изотропной диэлектрической среде.

$$\begin{cases}\operatorname{div}\vec{D}=\rho,\\ \operatorname{rot}\vec{E}=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\oint\limits_{S_V}\vec{D}d\vec{S}=\int\limits_V\rho dV,\\ \oint\vec{E}d\vec{l}=0.\end{cases}$$

Для изотропной среды $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, тогда

$$\begin{cases}\operatorname{div}\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon},\\ \operatorname{rot}\vec{E}=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\oint\limits_{S_V}\vec{E}d\vec{S}=\dfrac{\int\limits_V\rho dV,}{\varepsilon_0\varepsilon}\\ \oint\vec{E}d\vec{l}=0.\end{cases}$$

5.10

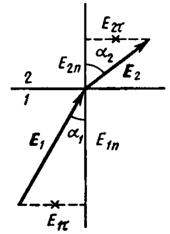
Из приведенных выше уравнений следует, что в изотропном бесконечном диэлектрике напряженность электрического поля, создаваемая свободными зарядами будет меньше в ε раз по сравнению с напряженностью поля соодаваемыми этими же зарядами в вакууме.ε_0

Граничныеусловия для векторов напряженности и электрической индукции

$$\begin{cases}D_{n_2}-D_{n_1}=\sigma,\\ E_{\tau_2}-E_{\tau_1}=0.\end{cases}$$

где $\sigma -$ плотность свободных поверхностных зарядов на границе двух диэлектриков.

5.11

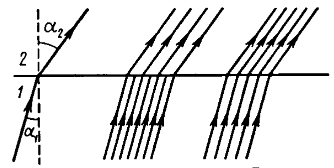


Преломление линий E и D.

$$E_{2\tau}=E_{1\tau},\ \varepsilon_2E_{2n}=\varepsilon_1E_{1n}.$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}=\frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Если $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, то $\alpha_2>\alpha_1$



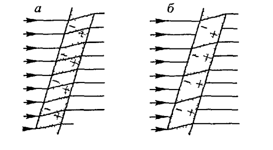


Рис 58 Линии смещения (а) и линии напряженности (б) в пластине диэлектрика

5.12

Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.

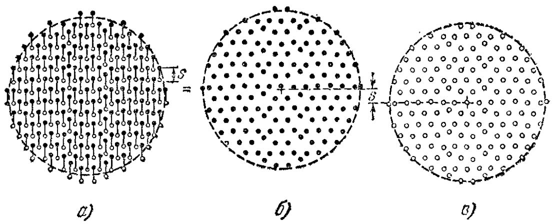
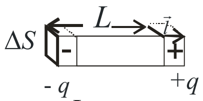


Рис. 9.25. Сфера с ориентированными молекулярными диполями (а) эквивалентна двум наложенным друг на друга несколько смещенным сферам, с положительными (б) и с отрицательными зарядами (в).

5.13

Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.



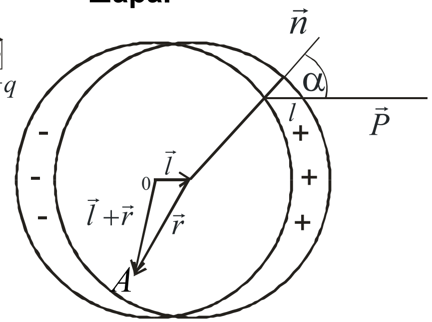
$p=qL=$

$=\rho\Delta S\left|\vec{l}\right|L=$

$=\rho\left|\vec{l}\right|\Delta SL=$

$=\left|\vec{P}\right|\Delta V.\Rightarrow$

$\vec{P}=\rho\vec{l}.$



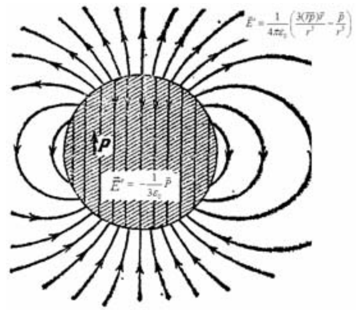
5.14

Поле внутри шара

$$\vec{E}'_A=\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{r}-\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho(\vec{r}+\vec{l})=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{l}=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P},$$

Поле вне шара совпадает с полем диполя

$$\vec{p}=V_{шара}\vec{P}=\frac{4}{3}\pi R^3_{шара}\rho\vec{l}, \text{ то есть } \vec{E}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right),$$



5.15

Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

$$\vec{E}'_A=\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{r}-\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho(\vec{r}+\vec{l})=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\vec{l}=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P},$$

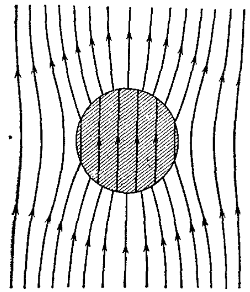
$$\vec{P}=\varepsilon_0\underbrace{\alpha}_{\varepsilon-1}\underbrace{(\vec{E}_0+\vec{E}')}_{\vec{E}},\Rightarrow\ \vec{P}=\varepsilon_0\alpha(\vec{E}_0-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}),$$

$$\vec{P}=3\varepsilon_0\frac{\alpha}{3+\alpha}\vec{E}_0=3\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0.$$

$\sigma'=P_n=P\cos\alpha.$ Дипольный момент шара:

$\vec{p}=\vec{P}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi\varepsilon_0R^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec{E}_0$, где R – радиус шара. При $\varepsilon\to\infty$ - проводящий шар.

5.16



Полное поле E внутри и снаружи шара из диэлектрика.

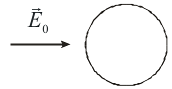
5.17

Фактор формы

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=\vec{E}_0-\frac{N}{\varepsilon_0}\vec{P},$$

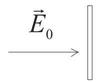
где N – Фактор формы.

Для шара $N=\dfrac{1}{3}$.

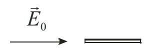


Для басконечной пластины:

если $\vec{E}_0\perp$ плоскости пластины $N=1$,



если $\vec{E}_0 \parallel$ плоскости пластины $N=0$.



5.18