

Лекция 2.

- Поток вектора напряженности электрического поля. Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса, её представление в дифференциальной форме.
- Потенциальность электростатического поля и её представление в дифференциальной форме. Потенциал. Нормировка потенциала. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

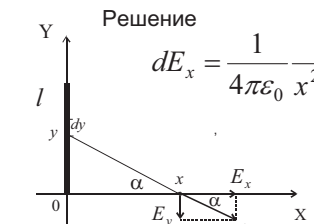
2.1

Пример решения задач электростатики

- Найти напряженность электрического поля, создаваемого зарядом однородно заряженной палочки длины на оси X , если палочка ориентирована вдоль оси Y , как показано на рисунке

2.2

Решение



$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma dy}{x^2 + y^2} \cos \alpha$$

Учитывая, что $\gamma = \frac{q}{l}$, $\cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$ имеем

$$E_x = \int dE_x = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} x \int_0^l \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} x \frac{1}{x^2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{y=0}^{y=l} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{l}{(x^2 + l^2)^{1/2}}$$

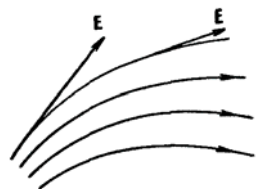
Аналогично для y компоненты получим

$$E_y = \int dE_y = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(l^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{x} \right)$$

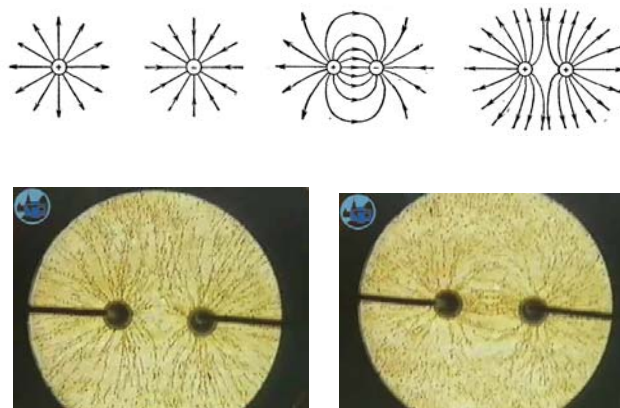
2.3

Линии напряженности электрического поля.

- Это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой же точке.

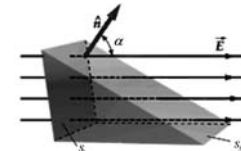


2.4



2.5

Поток вектора напряженности электрического поля.



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} S = E \cdot S \cdot \cos \alpha = E_n S,$$

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

$$\Phi \sim N - \text{количество линий } \vec{E},$$

$$N_1 = N_2.$$

$$S_2 = S_1 \cos \alpha;$$

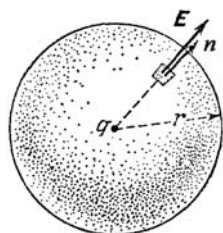
$$\Delta \Phi_i = |\vec{E}_i| \Delta S_i \cos \alpha_i = \vec{E}_i \cdot \underbrace{\Delta S_i \vec{n}_i}_{\Delta \vec{S}_i} = \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i$$

$$\Phi_S = \sum_i \Delta \Phi_i = \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i;$$

При $i \rightarrow \infty$ $\Phi_S = \int_S \vec{E} d\vec{S}.$

2.6

Поток вектора напряженности электрического поля через сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд q .



$$\Phi = \oint_{S=4\pi r^2} \vec{E} d\vec{S} = \sum_i E \cdot \Delta S_i \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

2.7

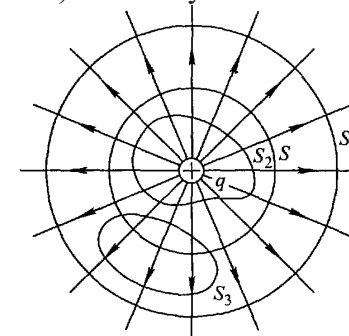
Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса

$$\int_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

2.8

Доказательство теоремы Остроградского–Гаусса в общем случае.

а) используя свойства силовых линий



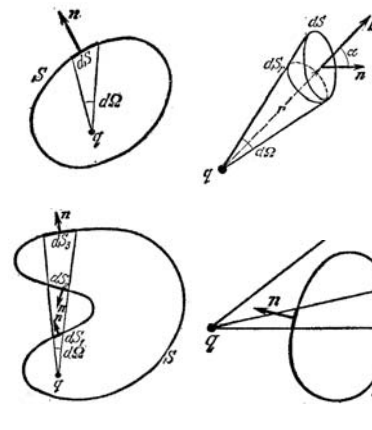
$$\Phi \sim N_S$$

$$N_S = N_{S_1} = N_{S_2},$$

$$N_{S_3} = 0.$$

2.9

б) непосредственное вычисление потока $\vec{E}$.



$$d\Phi = E dS \cos \alpha =$$

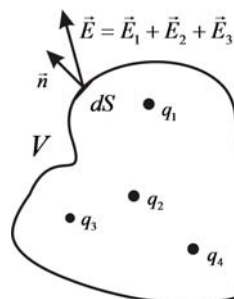
$$E dS_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_r}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

$$\oint d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

2.10

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$ Согласно принципу суперпозиции



$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) d\vec{S} =$$

$$= \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \dots}{\epsilon_0} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

Для непрерывного распределения зарядов имеем

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}.$$

2.11

Примеры использования теоремы Остроградского–Гаусса.

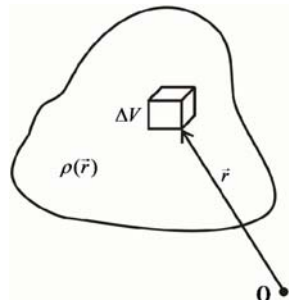
• Теорема Ирншоу.

Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных зарядов неустойчива, если на них действуют только электрические силы.

- Поле однородно заряженной сферы.
- Поле однородно заряженной бесконечной плоскости.
- Поле однородно заряженного бесконечного цилиндра.

2.12

Дифференциальная форма электростатической теоремы Остроградского–Гаусса



$$\oint_{S_{\Delta V}} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0};$$

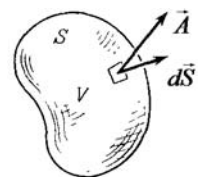
$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_{\Delta V}} \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

В декартовой системе координат

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

2.13

Формула Гаусса-Остроградского.



$$\oint_{S_V} \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV$$

С помощью этой формулы несложно из интегральной электростатической теоремы Остр.-Гаусса получить ее дифференциальную формулу и наоборот.

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{Q_V}{\epsilon_0}; \Rightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

2.14

Потенциальность электростатического поля. Потенциал.

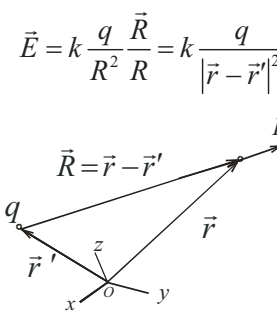
$$\vec{E} = -\nabla \varphi,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенциал

Замечание. Потенциал определен с точностью до константы, то есть $\varphi' = \varphi + C$ тоже потенциал. Для однозначности потенциал нормируют, задавая ему определенное значение в некоторой точке пространства. Обычно выбирают нулевое значение потенциала на бесконечности или поверхности Земли.

2.14

Потенциал электрического поля точечного заряда.



$$\vec{E} = k \frac{q}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla_{\vec{r}} \left(k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C \right),$$

$$\varphi = k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Если $\varphi(\infty) = 0$, то $C = 0$,

$$\varphi = k \frac{q}{R}.$$

2.16

Потенциал поля системы зарядов.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = -\sum_i \nabla \varphi_i(\vec{r}) = -\nabla \left(\sum_i \varphi_i(\vec{r}) \right),$$

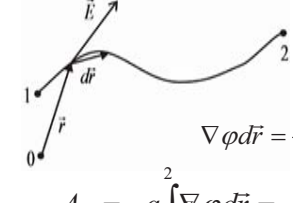
$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

В случае непрерывного распределения зарядов $q_i = \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}_i) \Delta V_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

2.17

Работа сил электростатического поля.



$$A_{12} = \int_1^2 \vec{q} \vec{E} d\vec{r} = -q \int_1^2 \nabla \varphi d\vec{r},$$

$$\nabla \varphi d\vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi(x, y, z),$$

$$A_{12} = -q \int_1^2 \nabla \varphi d\vec{r} = -q \int_1^2 d\varphi = \underbrace{q\varphi_1}_{\Pi_1} - \underbrace{q\varphi_2}_{\Pi_2}.$$

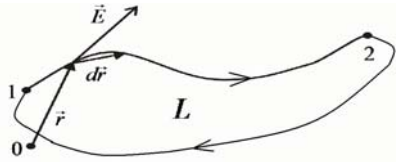
– потенциальная энергия заряда в поле $\vec{E}$.

Единицы измерения φ и E .

$$\varphi = \frac{\Pi}{q} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = B; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi; \Rightarrow [E] = \frac{[\varphi]}{[l]} = \frac{B}{\text{м}}.$$

2.18

Циркуляция вектора напряженности
электростатического поля.



$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} + \int_2^1 \vec{E} d\vec{r} =$$

$$= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \text{ то есть } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

2.19

Формула Стокса. Теорема о циркуляции,
её представление в
дифференциальной форме.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_{S_L} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = 0.$$

2.20