

Лекция 1.

- Электромагнитное взаимодействие и его место среди других взаимодействий в природе. Электрический заряд. Линейная, поверхностная и объемная плотности электрического заряда. Микроскопические носители заряда. Опыт Милликона. Закон сохранения электрического заряда.
- Электростатика. Закон Кулона. Его полевая трактовка. Вектор напряженности электрического поля. Принцип суперпозиции электрических полей

1.1

Электромагнитное взаимодействие. Электрический заряд.

- Электромагнитным взаимодействием называется взаимодействие между электрически заряженными телами или электрически заряженными телами и электромагнитным полем.
- Если тело электрически заряжено, то говоря, что оно имеет электрический заряд. То есть, электрический заряд это физическая величина, являющаяся источником электромагнитных взаимодействий.
- Взаимодействие между покоящимися заряженными телами (или кратко зарядами) называют электрическими или точнее электростатическими взаимодействиями.

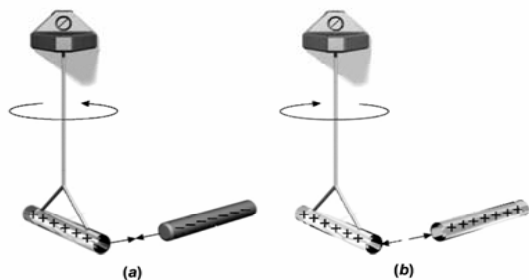
1.2

Электризация трением. Притяжение мелких предметов наэлектризованными телами.



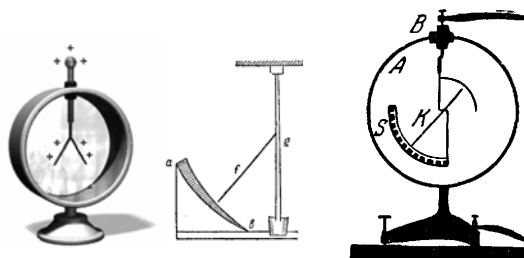
1.3

Два вида электрических зарядов
(положительные и отрицательные).



1.4

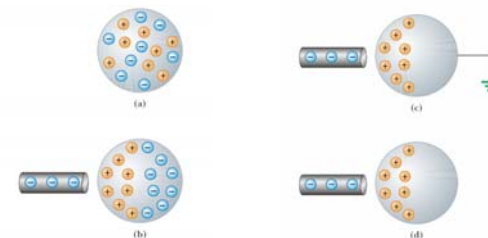
Электроскопы и электрометры.



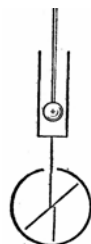
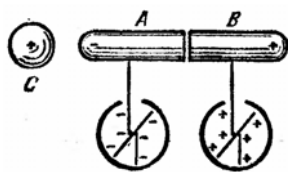
Электрометр
Г.В.Рихмана (1745)

1.5

Электростатическая индукция.
Электризация проводника через влияние.



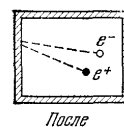
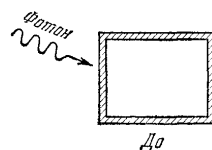
1.6



1.7

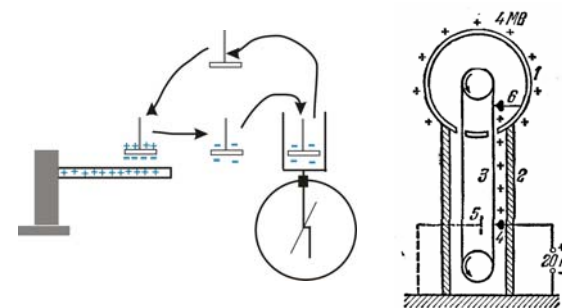
Закон сохранения электрического заряда.

- Алгебраическая сумма зарядов в любой замкнутой системе сохраняется неизменной при любых электрических взаимодействиях и превращениях веществ внутри этой системы.



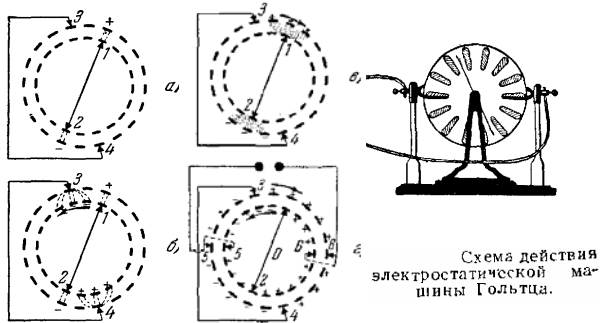
1.8

Принцип работы электрофорной
машины. Генератор Ван-де-Граафа.



1.9

Принцип работы электростатической машины.



1.10

Микроскопические носители заряда. Опыт Милликена.

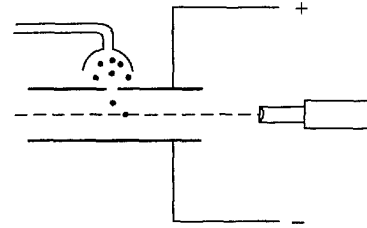


Схема опыта Милликена

1.11

$$F_m = F_q + F_{mp} + F_{Ap}$$

$$mg = qE + 6\pi\eta av + m_{\text{воздуха}}g$$

$$(q_1 - q_0), (q_2 - q_0), (q_3 - q_0), \dots$$

$$e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

1.12

Электромагнитное взаимодействие и его место среди других взаимодействий в природе.

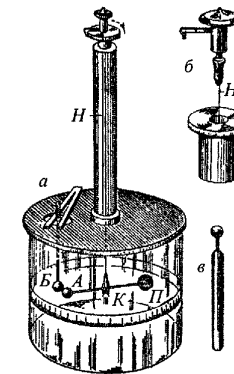
- Фундаментальные взаимодействия (силы) в природе:
- Гравитационные
- Электромагнитные
- Слабые
- Сильные

1.13

Электростатика. Закон Кулона.

- **Электростатика** – раздел электромагнетизма, в котором изучается взаимодействие неподвижных зарядов.
- Закон взаимодействия неподвижных заряженных тел был открыт в 1785 году Кулоном с помощью изобретенных им крутильных весов

1.14



Крутильные весы Кулона

1.15

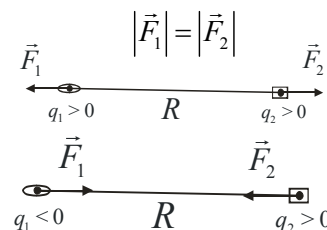
Закон Кулона.

- Величина силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$|\vec{F}| \sim \frac{|q_1||q_2|}{R^2} \quad |\vec{F}| = k \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$

1.16

- Силы взаимодействия между точечными зарядами направлены вдоль линии, соединяющей эти заряды, и по модулю равны. Одного знака заряды отталкиваются, разного знака – притягиваются.



1.17

Единица заряда

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ А} \cdot \text{с} \quad 1 \text{ Кл} = 0,1 \text{ С} \cdot 1 \text{ СГСЭ}_q$$

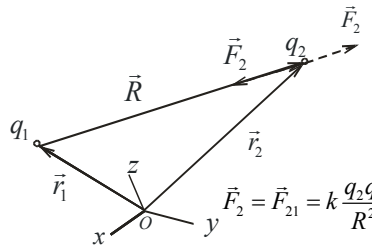
$$k = C^2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$

1.18

Векторная форма записи закона Кулона

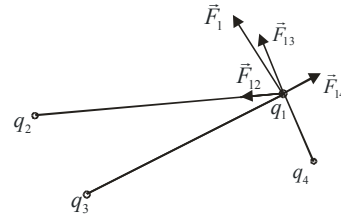


$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} = k \frac{q_2 q_1}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = k \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -k \frac{q_1 q_2}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}$$

1.19

Принцип суперпозиции для сил взаимодействия точечных зарядов.



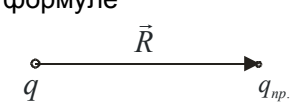
Из опыта следует

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = \sum_i \vec{F}_{1i}$$

1.20

Полевая трактовка закона Кулона. Электрическое поле.

- Введем величину вектора напряженности электрического поля в точке нахождения пробного заряда по формуле



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{qnp.}}{q_{np.}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

1.21

Напряженность электрического поля точечного заряда.

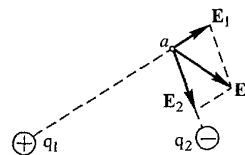
$$\vec{E}_q = \frac{\vec{F}_{qqnp.}}{q_{np.}} = \frac{1}{q_{np.}} \frac{qq_{np.}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R}$$

Модуль вектора напряженности равен

$$|\vec{E}_q| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{R^2}$$

1.22

Полевая трактовка принципа суперпозиции. Принцип суперпозиции электрических полей.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

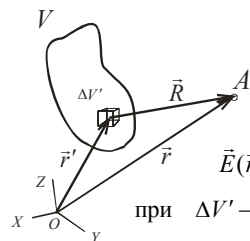
1.23

Объемная, поверхностная и линейная плотности электрического заряда

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \gamma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

1.24

Напряженность электрического поля, создаваемая непрерывным распределением зарядов



где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $\Delta q = \rho(\vec{r}')\Delta V'$.

$$\Delta \vec{E}_{\Delta q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q \cdot \vec{R}}{R^3} = \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V' (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\Delta q} \Delta \vec{E}_{\Delta q} = \sum_{\Delta V'} \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Delta V'$$

при $\Delta V' \rightarrow 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV'$$

1.25

В случае распределения зарядов на поверхности S и на участке линии L для напряженности электрического поля имеем

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma(\vec{r}') dS'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \gamma(\vec{r}') dl'$$

1.26

Лекция 2.

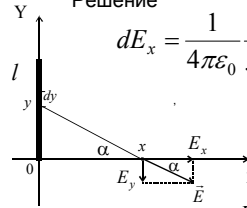
- Поток вектора напряженности электрического поля. Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса, её представление в дифференциальной форме.
 - Потенциальность электростатического поля и её представление в дифференциальной форме. Потенциал. Нормировка потенциала. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.
- 2.1

Пример решения задач электростатики

- Найти напряженность электрического поля, создаваемого зарядом однородно заряженной палочки длины на оси X , если палочка ориентирована вдоль оси Y , как показано на рисунке

2.2

Решение



$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma dy}{x^2 + y^2} \cos \alpha$$

Учитывая, что $\gamma = \frac{q}{l}$, $\cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$

имеем

$$E_x = \int dE_x = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} x \int_0^l \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} x \frac{1}{x^2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{y=0}^{y=l} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{l}{(x^2 + l^2)^{1/2}}$$

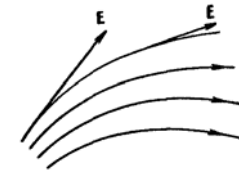
Аналогично для y компоненты получим

$$E_y = \int dE_y = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(l^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{x} \right)$$

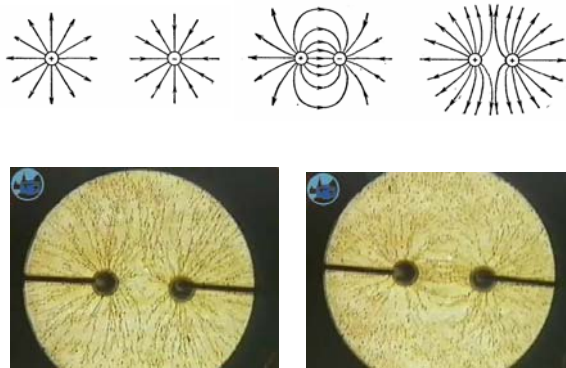
2.3

Линии напряженности электрического поля.

- Это линии, вдоль которых вектор напряженности касателен в каждой точке.

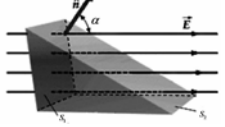


2.4



2.5

Поток вектора напряженности электрического поля.



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} S = E \cdot S \cdot \cos \alpha = E_n S,$$

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

$$\Phi \sim N - \text{количество линий } \vec{E},$$

$$N_1 = N_2.$$

$$S_2 = S_1 \cos \alpha;$$

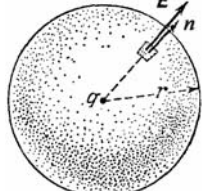
$$\Delta \Phi_i = |\vec{E}_i| \Delta S_i \cos \alpha_i = \vec{E}_i \cdot \Delta S_i \vec{n}_i = \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i$$

$$\Phi_S = \sum_i \Delta \Phi_i = \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i;$$

При $i \rightarrow \infty$ $\Phi_S = \int_S \vec{E} d\vec{S}.$

2.6

Поток вектора напряженности электрического поля через сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд q .



$$\Phi = \oint_{S=4\pi r^2} \vec{E} d\vec{S} = \sum_i E \cdot \Delta S_i \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

2.7

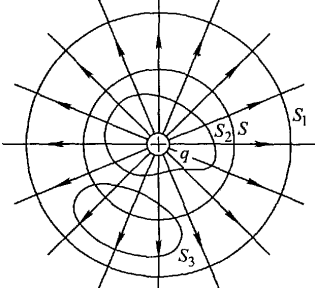
Электростатическая теорема Остроградского–Гаусса

$$\int_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

2.8

Доказательство теоремы Остроградского–Гаусса в общем случае.

а) используя свойства силовых линий



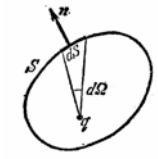
$$\Phi \sim N_S$$

$$N_S = N_{S_1} = N_{S_2},$$

$$N_{S_3} = 0.$$

2.9

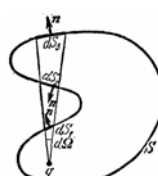
б) непосредственное вычисление потока $\vec{E}$.



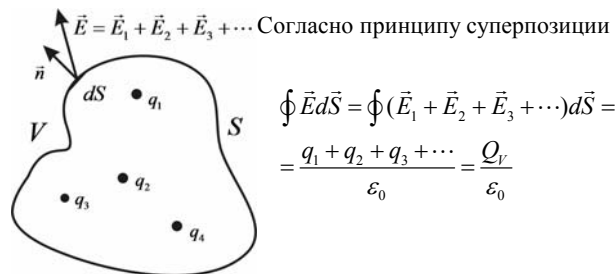
$$d\Phi = E dS \cos \alpha =$$

$$E dS_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_r}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

$$\oint d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$


2.10



Для непрерывного распределения зарядов имеем

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}.$$

2.11

Примеры использования теоремы Остроградского–Гаусса.

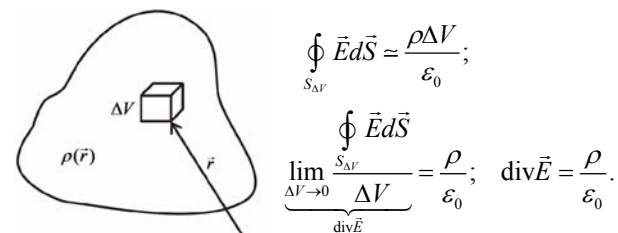
• Теорема Ирншоу.

Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных зарядов неустойчива, если на них действуют только электрические силы.

- Поле однородно заряженной сферы.
- Поле однородно заряженной бесконечной плоскости.
- Поле однородно заряженного бесконечного цилиндра.

2.12

Дифференциальная форма электростатической теоремы Остроградского–Гаусса



$$\oint_{S_{\Delta V}} \vec{E} d\vec{S} \approx \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0};$$

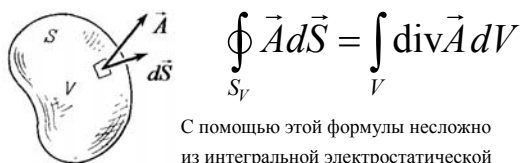
$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_{\Delta V}} \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

В декартовой системе координат

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

2.13

Формула Гаусса-Остроградского.



С помощью этой формулы несложно из интегральной электростатической теоремы Остр.-Гаусса получить ее дифференциальную формулу и наоборот.

$$\oint_{S_V} \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV$$

$$\oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}; \Rightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

2.14

Потенциальность электростатического поля. Потенциал.

$$\vec{E} = -\nabla \varphi,$$

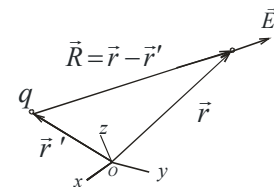
где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенциал

Замечание. Потенциал определен с точностью до константы, то есть $\varphi' = \varphi + C$ тоже потенциал. Для однозначности потенциал нормируют, задавая ему определенное значение в некоторой точке пространства. Обычно выбирают нулевое значение потенциала на бесконечности или поверхности Земли.

2.14

Потенциал электрического поля точечного заряда.

$$\vec{E} = k \frac{q}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla_{\vec{r}} \left(k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C \right),$$



$$\varphi = k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Если $\varphi(\infty) = 0$, то $C = 0$,

$$\varphi = k \frac{q}{R}.$$

2.16

Потенциал поля системы зарядов.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = -\sum_i \nabla \varphi_i(\vec{r}) = -\nabla \left(\sum_i \varphi_i(\vec{r}) \right),$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

В случае непрерывного распределения зарядов $q_i = \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}_i) \Delta V_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

2.17

Работа сил электростатического поля.

$$A_{12} = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{r} = -q \int_1^2 \nabla \varphi d\vec{r},$$

$$\nabla \varphi d\vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi(x, y, z),$$

$$A_{12} = -q \int_1^2 \nabla \varphi d\vec{r} = -q \int_1^2 d\varphi = \frac{q\varphi_1}{\Gamma_1} - \frac{q\varphi_2}{\Gamma_2}.$$

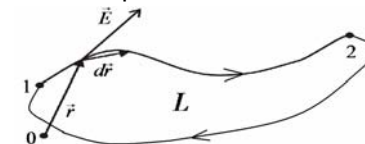
– потенциальная энергия заряда в поле $\vec{E}$.

Единицы измерения φ и E .

$$\varphi = \frac{П}{q} = \frac{Дж}{Кл} = В; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi; \Rightarrow [E] = \frac{[\varphi]}{[l]} = \frac{В}{м}.$$

2.18

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.



$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} + \int_2^1 \vec{E} d\vec{r} =$$

$$= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \text{ то есть } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

2.19

Формула Стокса. Теорема о циркуляции, её представление в дифференциальной форме.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_{S_L} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = 0.$$

2.20

Лекция 3.

- Потенциал системы точечных зарядов и непрерывного распределения зарядов. Уравнения Лапласа и Пуассона.
- Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

3.1

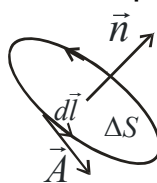
Потенциал системы точечных зарядов и непрерывного распределения зарядов.

$$\varphi(r) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|},$$

$$\varphi(r) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

3.2

Ротор векторной функции



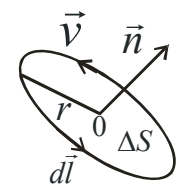
$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S} = (\text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n})$$

$$\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

3.3

Физический смысл ротора в рамках гидродинамической аналогии



$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{v 2\pi r}{\pi r^2} = \frac{\omega r 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega$$

3.4

Физический смысл ротора в электростатике

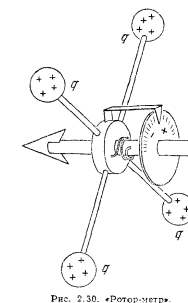


Рис. 2.30. «Ротор-метр».

3.5

Система полевых уравнений электростатики в вакууме в интегральной и дифференциальной форме.

$$\int_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = 0.$$

3.6

Уравнения Лапласа и Пуассона.

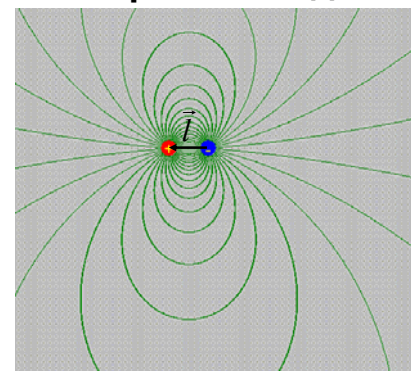
Если $\vec{E} = -\nabla \varphi$, то тождественно $\text{rot} \vec{E} = 0$. Тогда $\frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div} \vec{E} = -\text{div} \nabla \varphi = -\Delta \varphi$, где $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

Уравнение Пуассона Уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Delta \varphi = 0.$$

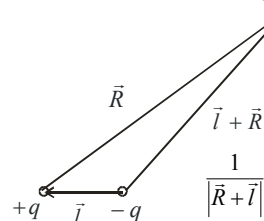
3.7

Электрический диполь.



3.8

Потенциал диполя.



$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} - \frac{q}{|\vec{R} + \vec{l}|} \right), \text{ где } q > 0.$$

$$\frac{1}{|\vec{R} + \vec{l}|} = \frac{1}{\left[(\vec{R} + \vec{l})^2 \right]^{1/2}} = \frac{1}{(R^2 + 2\vec{R}\vec{l} + l^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{R \left(1 + 2\frac{\vec{R}\vec{l}}{R^2} + \frac{l^2}{R^2} \right)^{1/2}} \approx \frac{1}{R} - \frac{\vec{l}\vec{R}}{R^3}, \quad \varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}.$$

3.9

Поле диполя

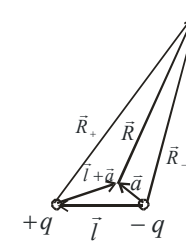
$$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi = -\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} k \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -k(\vec{p}\vec{R}) \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{R^5} - k \frac{p_x}{R^3} =$$

$$= k \left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})x}{R^5} - \frac{p_x}{R^3} \right), \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3} \right).$$

3.10

Потенциал и поле диполя(общий случай).



$$\vec{R}_+ = \vec{l} + \vec{a} + \vec{R}$$

$$\vec{R}_- = \vec{a} + \vec{R}$$

Если $\vec{l}$ и $\vec{a} \ll \vec{R}$,

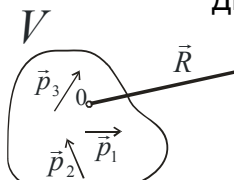
то потенциал и поле будут равны

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l}.$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3} \right).$$

3.11

Потенциал и поле системы диполей.



Если $d \sim \sqrt[3]{V} \ll R$, то

$$\varphi_d = \sum_{i=1}^N \varphi_d^i = \sum_{i=1}^N k \frac{\vec{p}_i \vec{R}}{R^3} = k \frac{\left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) \vec{R}}{R^3} = k \frac{\vec{P}\vec{R}}{R^3},$$

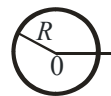
где $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{P}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{P}}{R^3} \right).$$

3.12

Пример решения задач электростатики с помощью уравнений Пуассона и Лапласа.

- Определить потенциал однородно заряженного шара, если радиус шара R , а его плотность заряда ρ .



$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$$

При $r > R$, $\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$

Общее решение этого уравнения равно

3.13

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Граничные условия

1) Нормировка потенциала. Если $r \rightarrow \infty$, то $\varphi \rightarrow 0$.

Отсюда $C_2 = 0$.

2) Условие точечности заряда. Если $r \gg R$, то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \text{ Отсюда } C_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}.$$

При $r \leq R$, $\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$

Общее решение этого уравнения равно

3.14

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Граничные условия

1) Если $r \rightarrow 0$, то φ - ограничено. Отсюда $C_3 = 0$.

2) Условие непрерывности потенциала

$$\varphi(R-0) = \varphi(R+0).$$

$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R} = \frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0}.$$

Находим $C_4 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$ и $\varphi = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}.$

3.15

В частности, для вектора напряженности

$$\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{имеем:}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}, \quad \text{при } r \leq R;$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{при } r > R.$$

3.16

Лекция 4.

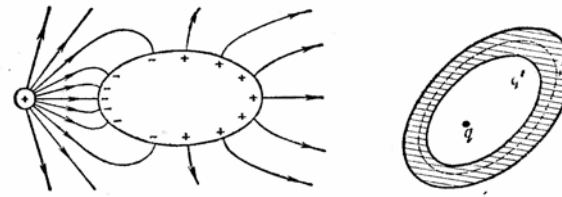
- Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция. Напряженность поля у поверхности и внутри проводника. Распределение заряда по поверхности проводника. Электростатическая защита. Проводящий шар в однородном электростатическом поле. Связь между зарядом и потенциалом проводника. Электроёмкость. Конденсаторы. Ёмкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

4.1

Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция.

- Явление перераспределения зарядов на проводнике при электрическом воздействии называется электрической (электростатической) индукцией.
- Явление перераспределения зарядов на проводнике при наличии внешнего стационарного электрического поля называется электростатической индукцией

4.2



4.3

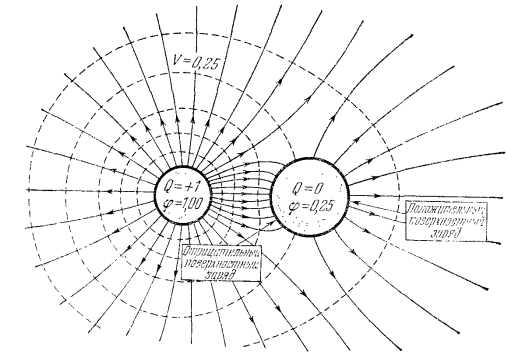
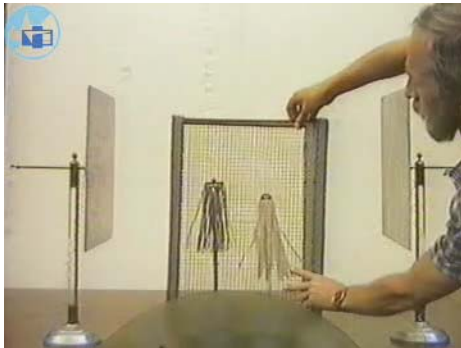


Рис. 3.5. Электрическое поле около двух сферических проводников, из которых один имеет заряд, равный +1, а другой — равный нулю. Штриховые кривые являются пересечениями эквипотенциальных поверхностей с плоскостью рисунка. Нулевой потенциал находится в бесконечности.

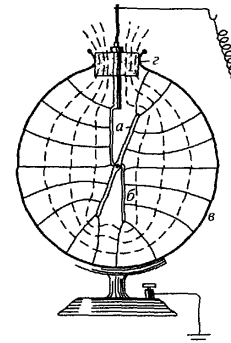
4.4

Электростатическая защита.



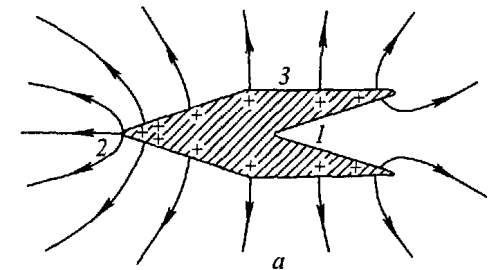
4.5

Электрометр или электростатический вольтметр.



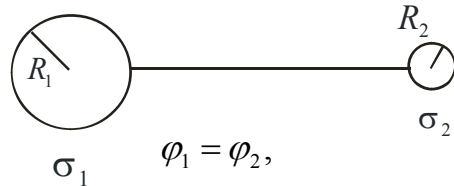
4.6

Распределение заряда по поверхности проводника.



4.7

Поверхностная плотность заряда пропорциональна кривизне поверхности



$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2},$$

$$\sigma_1 \cdot R_1 = \sigma_2 \cdot R_2.$$

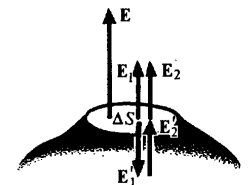
4.8

Напряженность поля у поверхности проводника.

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad E_\tau = 0.$$

4.9

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} E$$

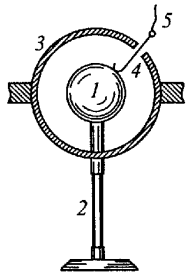


50

Механизм образования поля вблизи поверхности проводника

4.10

Метод Кавендиша проверки закона Кулона



$$F \sim \frac{q_1 q_2}{R^{2 \pm \delta}}$$

$$\delta < 1/21600$$

4.11

Связь между зарядом и потенциалом проводника. Электроёмкость.

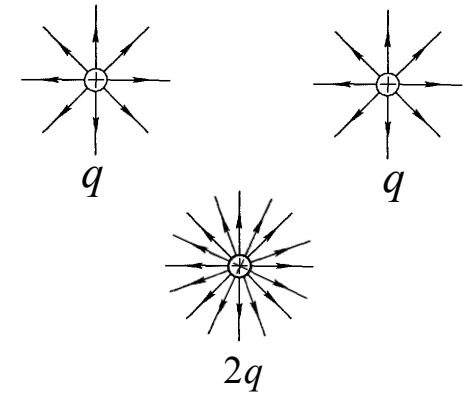
$$\varphi(\vec{r}) = \int_S k \frac{\sigma(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS', \quad q = \int_S \sigma(r') dS'$$

$$\varphi = \frac{1}{c} q$$

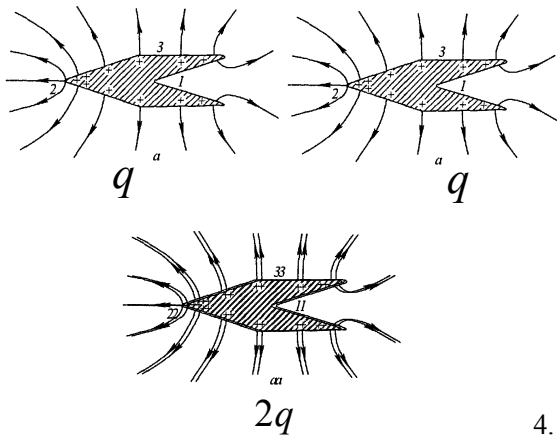
Электроёмкость шара

$$c = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{k \frac{q}{R}} = \frac{R}{k}, \quad c_{\text{земли}} = \frac{6,4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} \approx 0,7 \cdot 10^{-3} \Phi$$

4.12

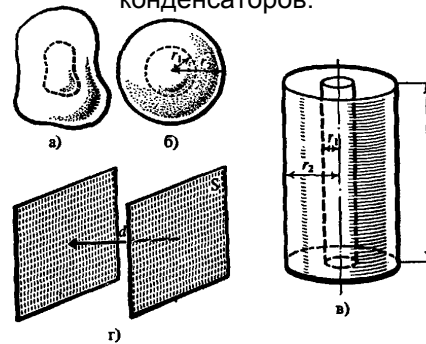


4.13



4.14

Конденсаторы. Ёмкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.



4.15

Ёмкость конденсатора $c = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$,

Плоский конденсатор

$$c = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

Сферический конденсатор

$$c = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

Цилиндрический конденсатор

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad c = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

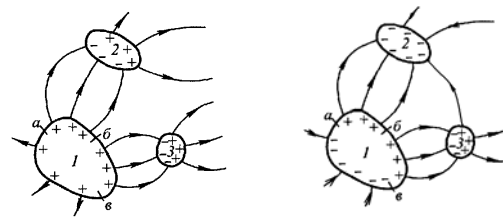
4.16

Потенциальные и емкостные коэффициенты

$\varphi_i = \sum_j \alpha_{ij} q_j$, где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ - потенциальные коэфф.

$q_j = \sum_i c_{ij} \varphi_i$, где $c_{ij} = c_{ji}$ - емкостные коэфф.

4.17



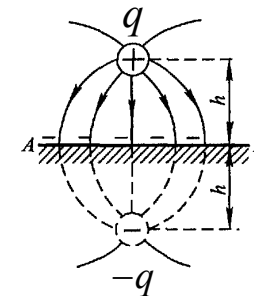
$$\varphi_2 \sim q_1, \varphi_3 \sim q_1; \quad \varphi_1 \sim q_2, \varphi_3 \sim q_2;$$

$$\varphi_i = \alpha_{i1} q_1, \quad \varphi_i = \alpha_{i2} q_2,$$

$$\varphi_i = \sum_j \alpha_{ij} q_j$$

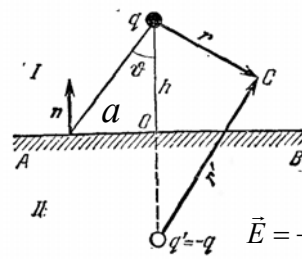
4.18

Метод изображений



$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \varphi = const, \\ \varphi_{r \rightarrow h} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{h}. \end{cases}$$

4.19



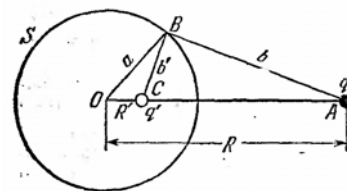
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right),$$

$$\cos \vartheta = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

$$\vec{E} = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{1}{a^2 + h^2} \cos \vartheta \vec{n}$$

$$\sigma = \frac{E}{\epsilon_0} = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} q \frac{1}{(a^2 + h^2)^{3/2}}, \quad q = \int_{\infty} \sigma dS.$$

4.20

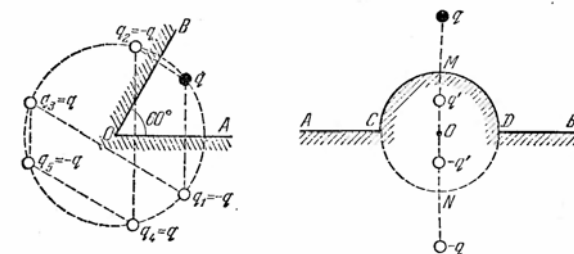


$$\Delta OBC \sim \Delta OBA, \Rightarrow R \cdot R' = a^2.$$

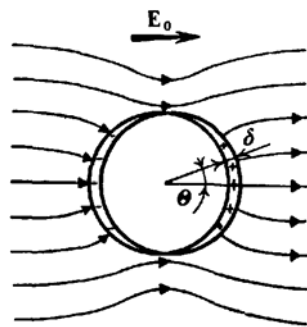
$$\text{Если } q' = -\frac{b'}{b} q = -\frac{a}{R} q, \text{ то } \varphi(a) = 0.$$

$$\text{Вне сферы } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right).$$

4.21



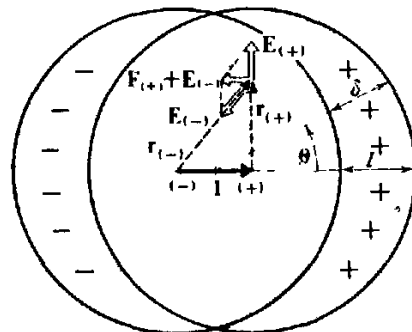
4.22



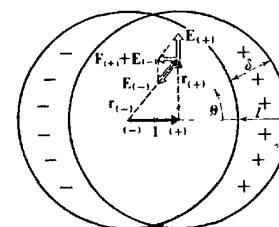
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = [\rho/(3\epsilon_0)] \mathbf{r},$$

4.23

Проводящий шар в однородном электрическом поле. [1, стр.125]



4.24



$$\mathbf{E}_{(+)} = [\rho/(3\epsilon_0)] \mathbf{r}_{(+)},$$

$$\mathbf{E}_{(-)} = -[\rho/(3\epsilon_0)] \mathbf{r}_{(-)},$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(+)} + \mathbf{E}_{(-)} = [\rho/(3\epsilon_0)] (\mathbf{r}_{(+)} - \mathbf{r}_{(-)}) = -[\rho/(3\epsilon_0)] \mathbf{l},$$

$$\rho \vec{l} = -3\epsilon_0 \vec{E} = 3\epsilon_0 \vec{E}_0, \quad \sigma \Delta S = \rho \Delta S \delta,$$

$$\sigma = \rho \delta = \rho l \cos \theta = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

$$\text{где } \delta = l \cos \theta. \quad \mathbf{E}_n = \sigma/\epsilon_0 = 3E_0 \cos \theta,$$

4.25

Поле вне шара - это поле диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = q\vec{l} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{l} = \frac{4}{3} \pi R^3 3\epsilon_0 \vec{E}_0,$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) + \vec{E}_0 =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \vec{E}_0 + \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{3(\vec{E}_0\vec{r})\vec{r}}{r^2}.$$

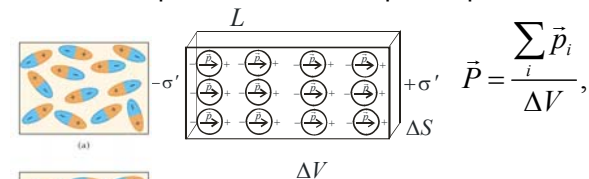
4.26

Лекция 5.

- Диэлектрики. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации. Связь вектора поляризации со связанными зарядами.
- Вектор электрической индукции в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость вещества. Материальное уравнение для векторов электрического поля.
- Теорема Остроградского – Гаусса для случая диэлектриков. Её дифференциальная форма.
- Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции.
- Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

5.1

Для характеристики поляризации диэлектрика вводят вектор поляризации



$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V},$$

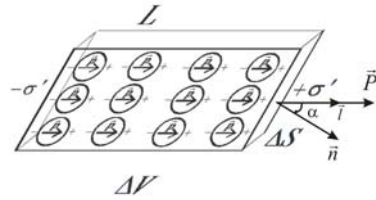
σ' - связанные заряды.

Из рисунка видно, что

$$P_n \Delta V = \sigma' \Delta S L, \text{ то есть } P_n = \sigma'$$

5.2

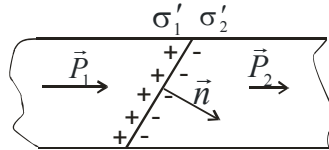
Связь вектора поляризации с поверхностными связанными зарядами.



$$\begin{aligned} \vec{p} &= q'L\vec{l} = \sigma'\Delta SL\vec{l}; \\ \vec{p} &= \vec{P}\Delta V = \vec{P}\Delta SL \cos \alpha = \underbrace{(\vec{P}\vec{n})}_{P_n} \vec{l} \Delta SL; \end{aligned} \Rightarrow \sigma' = (\vec{P}\vec{n}) = P_n;$$

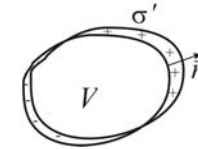
5.3

Для границы двух диэлектриков имеем $\sigma' = \sigma'_1 - \sigma'_2 = P_{1n} - P_{2n} = -\vec{n}(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$.



5.4

Связь вектора поляризации с объемными связанными зарядами.



$$\begin{aligned} \oint_{S_V} \sigma' dS &= -Q'_V = -\int_V \rho' dV; \\ \oint_{S_V} \sigma' dS &= \oint_{S_V} \vec{P}\vec{n} dS = \oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{P} dV; \\ \oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} &= Q'_V, \quad \text{div} \vec{P} = -\rho'. \end{aligned}$$

5.5

Для объемной плотности связанных зарядов справедливы соотношения

$$\oint_{S_V} \vec{P} d\vec{S} = -\int_V \rho' dV,$$

$$\text{div} \vec{P} = -\rho'.$$

Вектор электрической индукции (смещения) в диэлектрике равен

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

5.6

Материальное уравнение для векторов электрического поля.

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \quad \text{или} \quad \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}).$$

Для многих сред эту связь можно представить в виде

$$P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} E_j + \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{ijk} E_j E_k,$$

где α_{ij} – тензор линейно восприимчивости, α_{ijk} – тензор нелинейно восприимчивости.

5.7

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость вещества.

Для изотропного диэлектрика $\alpha_{ij} = \delta_{ij} \alpha$,

тогда имеем

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

где по определению $\epsilon = 1 + \alpha$, – относительная диэлектрическая проницаемость вещества.

5.8

Теорема Остроградского – Гаусса для случая диэлектриков в дифференциальной и интегральной форме.

$$\text{div} \vec{D} = \epsilon_0 \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{\frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0}} + \underbrace{\text{div} \vec{P}}_{-\rho'} = \rho;$$

Дифференциальная форма - $\text{div} \vec{D} = \rho$.

$$\text{Интегральная форма} - \oint_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

5.9

Система полевых уравнений электростатики в бесконечной изотропной диэлектрической среде.

$$\begin{cases} \text{div} \vec{D} = \rho, \\ \text{rot} \vec{E} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

Для изотропной среды $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, тогда

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}, \\ \text{rot} \vec{E} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0 \epsilon}, \\ \oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

5.10

Из приведенных выше уравнений следует, что в изотропном бесконечном диэлектрике напряженность электрического поля, создаваемая свободными зарядами будет меньше в ϵ раз по сравнению с напряженностью поля создаваемыми этими же зарядами в вакууме. ϵ_0

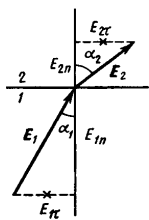
Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции

$$\begin{cases} D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma, \\ E_{\tau_2} - E_{\tau_1} = 0. \end{cases}$$

где σ – плотность свободных поверхностных зарядов на границе двух диэлектриков.

5.11

Преломление линий E и D.



$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}.$$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то $\alpha_2 > \alpha_1$

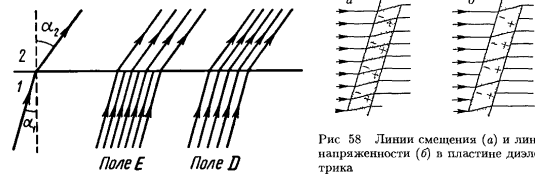


Рис. 58 Линии смещения (а) и линии напряженности (б) в пластине диэлектрика

5.12

Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.

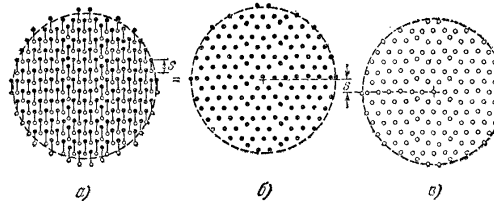
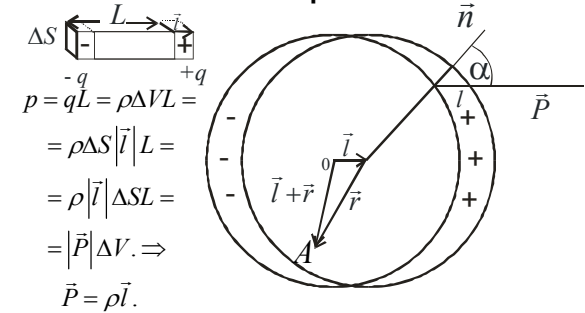


Рис. 9.25. Сфера с ориентированными молекулярными диполями (а) эквивалентна двум положенным друг на друга несколько смещенным сферам, с положительными (б) и с отрицательными зарядами (в).

5.13

Электрическое поле однородно поляризованного диэлектрического шара.



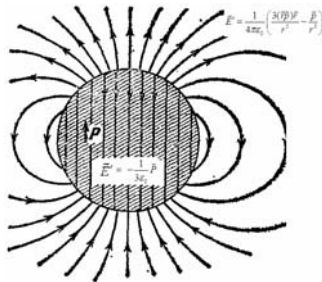
5.14

Поле внутри шара

$$\vec{E}'_A = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho \vec{r} - \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho (\vec{r} + \vec{l}) = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \rho \vec{l} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P},$$

Поле вне шара совпадает с полем диполя

$$\vec{P} = V_{\text{шара}} \vec{P} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{l}, \text{ то есть } \vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\vec{r}\vec{P})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right),$$



5.15

Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

$$\vec{E}'_A = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho \vec{r} - \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho (\vec{r} + \vec{l}) = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \rho \vec{l} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P},$$

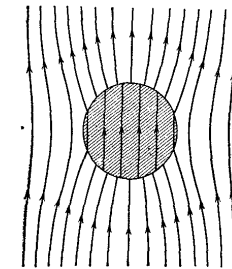
$$\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha \underbrace{(\vec{E}_0 + \vec{E}')}_{\vec{E}}, \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \alpha (\vec{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}),$$

$$\vec{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\alpha}{3 + \alpha} \vec{E}_0 = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0.$$

$$\sigma' = P_n = P \cos \alpha. \quad \text{Дипольный момент шара:}$$

$$\vec{p} = \vec{P} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0, \text{ где } R - \text{ радиус шара. При } \varepsilon \rightarrow \infty - \text{ проводящий шар.}$$

5.16



Полное поле E внутри и снаружи шара из диэлектрика.

5.17

Фактор формы

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \frac{N}{\varepsilon_0} \vec{P},$$

где N – Фактор формы.

$$\text{Для шара } N = \frac{1}{3}. \quad \vec{E}_0 \rightarrow \bigcirc$$

Для бесконечной пластины:

$$\text{если } \vec{E}_0 \perp \text{ плоскости пластины } N = 1, \quad \vec{E}_0 \rightarrow \parallel$$

$$\text{если } \vec{E}_0 \parallel \text{ плоскости пластины } N = 0. \quad \vec{E}_0 \rightarrow \parallel$$

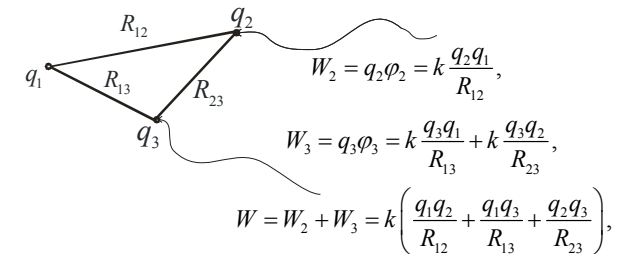
5.18

Лекция 6.

- Энергия системы электрических зарядов. Энергия взаимодействия и собственная энергия. Энергия электростатического поля и её объемная плотность. Энергия электрического диполя во внешнем поле.
- Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов.

6.1

Энергия системы электрических зарядов.



$$W = k \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \text{ где } \varphi_i = k \sum_j \frac{q_j}{R_{ij}},$$

6.2

Энергия взаимодействия зарядов при наличии диэлектриков

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \text{ но } \varphi_i \neq k \sum_j \frac{q_j}{R_{ij}}.$$

Энергия взаимодействия зарядов при непрерывном распределении зарядов

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV.$$

Пример. Энергия конденсатора.

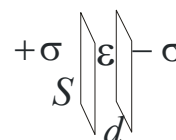
$$W = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} q_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} q_1 U = \frac{cU^2}{2}.$$

6.3

Энергия системы заряженных проводников

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} q_i q_j.$$

Энергия электростатического поля и её объемная плотность.



$$W = \frac{1}{2} c U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon E}_{\vec{D}} \cdot \underbrace{E}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{Sd}_{\vec{V}} = \frac{DE}{2} V.$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}.$$

6.4

Строгий вывод формулы для плотности энергии электростатического поля

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} (\operatorname{div} \vec{D}) \varphi dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\infty} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \right) \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (D_i \varphi)}{\partial x_i}}_{\operatorname{div}(\varphi \vec{D})} - \underbrace{\sum_{i=1}^3 D_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}_{-\vec{D} \vec{E}} \right) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_{S_{R \rightarrow \infty}} \varphi \vec{D} d\vec{S}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{D} \vec{E} dV = \int_{\infty} w dV, \text{ где } w = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}.$$

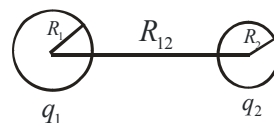
6.5

Энергия взаимодействия и собственная энергия.

- Собственная энергия заряженного тела - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов данного тела друг с другом.
- Энергия взаимодействия двух заряженных тел - это энергия, обусловленная взаимодействием зарядов одного тела с зарядами другого тела.

6.6

Рассмотрим для простоты два заряженных проводящих шара



Для уединенных шаров

$$W_1^{\text{собст.}} = \frac{q_1 \varphi_1}{2}, \quad W_2^{\text{собст.}} = \frac{q_2 \varphi_2}{2}.$$

Для взаимодействующих шаров

$$\varphi_1 = \varphi_1^{q_1} + \varphi_1^{q_2}, \quad \varphi_2 = \varphi_2^{q_1} + \varphi_2^{q_2}. \quad W = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} q_1 \varphi_1^{q_1}}_{W_1^{\text{собст.}}} + \underbrace{\frac{1}{2} q_2 \varphi_2^{q_2}}_{W_2^{\text{собст.}}} + \underbrace{\frac{1}{2} q_1 \varphi_1^{q_2} + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2^{q_1}}_{W_{\text{взаимодействия}}}.$$

6.7

В рамках полевого формализма

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

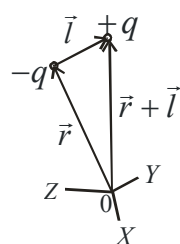
$$W = \int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2} dV =$$

$$= \underbrace{\int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_1^2}{2} dV}_{W_1^{\text{собст.}}} + \underbrace{\int_{\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_2^2}{2} dV}_{W_2^{\text{собст.}}} + \underbrace{\int_{\infty} \varepsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV}_{U_{\text{взаимод.}}}.$$

При $R_{1,2} \rightarrow 0$, $W_{1,2}^{\text{собст.}} \rightarrow \infty$; $U_{\text{взаимод.}} \leq$ или > 0 .

6.8

Энергия электрического диполя во внешнем поле.



$$W = q\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - q\varphi(\vec{r}),$$

$$\varphi(\vec{r} + \vec{l}) = \varphi(x + l_x, y + l_y, z + l_z) =$$

$$= \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + \dots,$$

$$W = \underbrace{q \vec{l}}_{\vec{p}} \cdot \underbrace{\nabla \varphi}_{-\vec{E}} = -\vec{p} \vec{E}.$$

6.9

Пондеромоторные силы в электрическом поле и методы их вычислений. Силы, действующие на диполь.

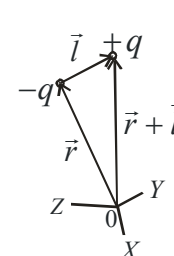
$$\vec{F} = -\nabla W; \quad F_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{p} \vec{E} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 p_j E_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 p_j \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^3 \left(p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right); \Rightarrow \vec{F} = (\vec{p} \nabla) \cdot \vec{E};$$

6.10

Момент силы, действующей на диполь



$$\vec{M} = [\vec{r} + \vec{l}, q\vec{E}(\vec{r} + \vec{l})] - [\vec{r}, q\vec{E}(\vec{r})],$$

В однородном поле $\vec{E} = \text{const}$, тогда

$$\vec{M} = [\vec{l}, q\vec{E}] = [q\vec{l}, \vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}].$$

6.11

Объемная плотность силы, действующая на диэлектрик

Дипольный момент объема диэлектрика

$\vec{P}_{\Delta V}$ выражается через вектор поляризации $\vec{P}$

$\vec{P}_{\Delta V} = \vec{P}\Delta V$, тогда плотность силы

$$\vec{f} = \frac{\vec{P}_{\Delta V}}{\Delta V} = \frac{(\vec{P}_{\Delta V} \cdot \nabla)\vec{E}}{\Delta V} = \left(\vec{P} \cdot \nabla \right) \vec{E} = \varepsilon_0 \alpha (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E};$$

$\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$

$$f_i = \varepsilon_0 \alpha \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varepsilon_0 \alpha \sum_{j=1}^3 \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}_{-E_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}_{-E_j} =$$

6.12

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_0 \alpha \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{E_j^2}{2} = \varepsilon_0 \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{E_j^2}{2} = \\ &= \varepsilon_0 \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\vec{E}^2}{2}. \text{ Окончательно имеем} \\ \vec{f} &= \varepsilon_0 \alpha \cdot \nabla \frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \cdot \nabla \frac{E^2}{2}. \end{aligned}$$

6.13

Связь пондеромоторных сил с энергией системы зарядов

Если в системе поддерживается $T = const$,
деформация среды не меняется и $\varepsilon = const$, то

$$dW = dW_{\text{энергия, поступающая от внешних источников}} + dA'_{\text{внешних сил}}.$$

Для квазистатических перемещений

$$dA'_{\text{внешних сил}} = -dA_{\text{электрического поля}} = -\sum_{i=1}^n F_i d\xi_i,$$

где ξ_i - обобщенные координаты, F_i - обобщенные силы.

$$dW_{\text{энергия, поступающая от внешних источников}} = \sum_j \varphi_j dq_j.$$

6.14

$$dW = \sum_j \varphi_j dq_j - \sum_{i=1}^n F_i d\xi_i.$$

1) Если $q_j = const$, то

$$\sum_{i=1}^n F_i d\xi_i = -dW(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = -\sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{q_j=const} d\xi_i.$$

$$F_i = -\left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{q_j=const}.$$

6.15

2) Если $\varphi_j = const$, то

$$dW = \frac{1}{2} \sum_j \varphi_j dq_j.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n F_i d\xi_i = dW(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{\varphi_j=const} d\xi_i.$$

$$F_i = \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right|_{\varphi_j=const}.$$

6.16

Пример. Вычислить силу притяжения пластин
плоского конденсатора, помещенного в жидкий
диэлектрик, если $q = const$.

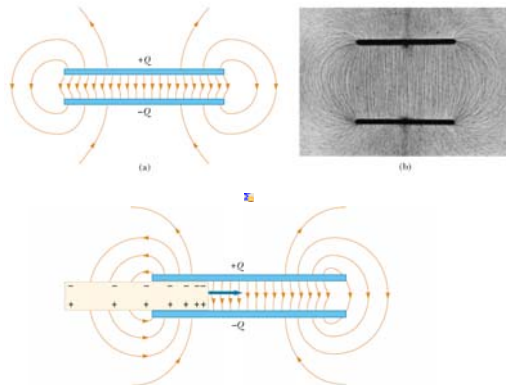
$$W = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

d - обобщенная координата.

$$F_d = -\left. \frac{\partial W}{\partial d} \right|_{q=const} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = -\frac{q}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{q}{2} E.$$

В диэлектрике сила взаимодействия пластин
уменьшилась в ε раз, то есть $F_d = F_d / \varepsilon$.

6.17



6.18

Лекция 7.

- Электронная теория поляризации диэлектриков. Локальное поле. Неполарные диэлектрики. Формула Клаузиуса – Мосотти. Полярные диэлектрики. Функция Ланжевена. Поляризация ионных кристаллов.
- Электрические свойства кристаллов. Пьезоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект и его применение.
- Сегнетоэлектрики. Доменная структура сегнетоэлектриков. Гистерезис. Точка Кюри сегнетоэлектрика. Применение сегнетоэлектриков.

7.1

Электронная теория поляризации диэлектриков. Локальное поле.

- Поляризационные свойства диэлектриков определяются поляризационными особенностями отдельных молекул вещества.
- Все молекулы можно разделить на полярные и неполярные молекулы.
- У неполярных молекул в отсутствии внешнего электрического поля дипольный момент равен нулю. Полярные молекулы обладают собственным дипольным моментом.

7.2

Поляризация неполярных молекул.

$\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}_0$, где β - поляризуемость молекулы.

Для оценки можно рассматривать молекулу как

проводящий шар с $R \sim 10^{-8}$ см, тогда

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0, \quad \beta = 4\pi R^3 \sim 4\pi 10^{-24} \text{ см}^3.$$

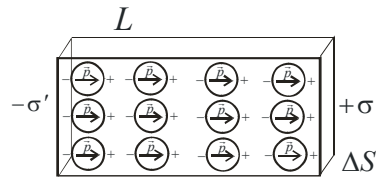
Элемент	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
$\beta \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$	0,66	0,21	12	9,3	1,5	0,4	27	1,6	34

7.3

Микроскопическое и макроскопическое поле в веществе.

$$\vec{E}_{\text{макро.}} = \left\langle \vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{микро.}} \right\rangle_{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{микро.}} dV.$$

Поле в диэлектрике это $\vec{E} = \vec{E}_{\text{макро.}}$



ΔV

7.4

Локальное поле.

Локальное поле, действующее на молекулу отличается, от макроскопического поля в диэлектрике на поле самой молекулы

$$\vec{E}_{\text{лок.}} = \vec{E} - \vec{E}_{\text{мол.}} \approx \vec{E}.$$

Поляризуемость разреженных газов.

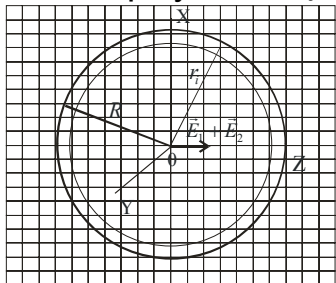
$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{N_{\Delta V}}{\Delta V} \vec{p}_1 = n \cdot \vec{p}_1 = n \cdot \epsilon_0 \beta \vec{E}_0 = \epsilon_0 \underbrace{n\beta}_{\alpha} \vec{E}.$$

Таким образом имеем

$$\alpha = \epsilon - 1 = n\beta.$$

7.5

Формула Клаузиуса-Мосотти.



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$\text{где } \vec{E}_1 = \sum_i \vec{E}_{r_i > R},$$

$$\vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_{r_i \leq R},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{3(\vec{p}_i \vec{r}_i) \vec{r}_i}{r_i^5} - \frac{\vec{p}}{r_i^3} \right),$$

$$E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3(p_x x_i + p_y y_i + p_z z_i) x_i - p_x r_i^2}{r_i^5} = 0.$$

7.6

Так как для кубической симметрии при суммировании по сферическому слою

$$\sum_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i r_i^2,$$

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2,$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i z_i x_i = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$E_{2y} = E_{2z} = 0.$$

7.7

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$

Таким образом, вектор поляризации равен

$$\vec{P} = n \cdot \epsilon_0 \beta \vec{E}_1 = n \epsilon_0 \beta \left(\vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \underbrace{\left(\frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta} \right)}_{\alpha} \vec{E}; \Rightarrow \alpha = \frac{n\beta}{1 - \frac{1}{3}n\beta}.$$

7.8

Из этой формулы имеем

$$n\beta = 3 \frac{\alpha}{3 + \alpha} = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}.$$

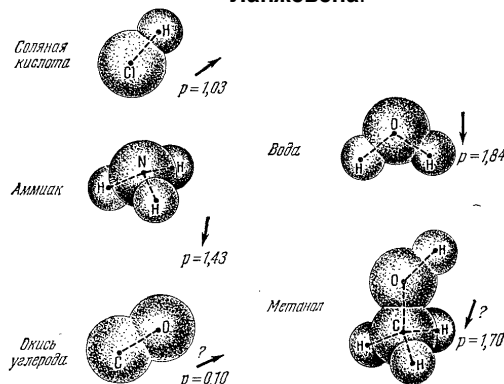
Формула Клаузиуса-Мосотти.

$$\text{Так как } n = \frac{\rho_m}{\mu} N_A, \text{ то } \beta N_A = \frac{\mu}{\rho_m} 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}.$$

в широких пределах для неполярных диэлектриков не зависит от физических параметров (например, для CO₂ вплоть до 100 МПа при 100°C).

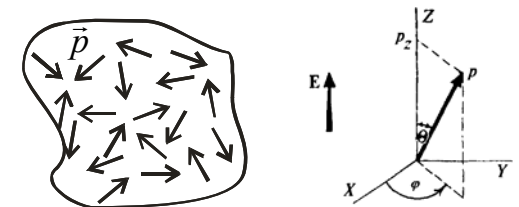
7.9

Полярные диэлектрики. Функция Ланжевена.



7.10

Поляризация газообразного полярного диэлектрика



ΔV

В соответствии с распределением Больцмана

$$dN = A e^{-\frac{W}{k_B T}} \cdot d\Omega, \text{ где } d\Omega = \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta,$$

$$W = -\vec{p} \vec{E} = -pE \cos \theta.$$

7.11

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int p_z dN}{\int dN} = \frac{\int_0^\pi p \cos \theta \cdot A e^{\frac{pE}{K_B T} \cos \theta} \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{\int_0^\pi A e^{\frac{pE}{K_B T} \cos \theta} \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta}.$$

$$I = \int_0^\pi e^{\frac{\zeta \cos \theta}{x}} \cdot \sin \theta \cdot d\theta = - \int_1^{-1} e^{\zeta x} \cdot dx = \frac{2}{\zeta} \text{sh} \zeta,$$

$$\frac{dI}{d\zeta} = \int_0^\pi \cos \theta \cdot e^{\zeta \cos \theta} \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{2}{\zeta} \text{sh} \zeta \right) =$$

$$= \frac{2}{\zeta} \left(\text{ch} \zeta - \frac{\text{sh} \zeta}{\zeta} \right);$$

7.12

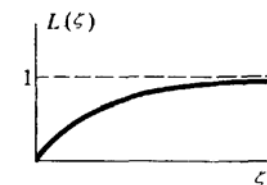
В результате имеем

$$\langle p_z \rangle = p \frac{\text{ch} \zeta - \frac{\text{sh} \zeta}{\zeta}}{\text{sh} \zeta} = p \cdot L(\zeta),$$

где

$$L(\zeta) = \text{cth} \zeta - \frac{1}{\zeta} - \text{функция Ланжевена.}$$

7.13



При $\zeta \ll 1$,

$$L(\zeta) = \frac{1}{3} \zeta + \dots,$$

$$\langle p_z \rangle = p \frac{\zeta}{3} = \varepsilon_0 \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{p^2}{K_B T} E = \varepsilon_0 \beta E,$$

где β - эффективная поляризуемость молекулы.

Для разреженных газов вектор поляризации равен

$$\vec{P} = n \langle \vec{p}_1 \rangle = \varepsilon_0 \underbrace{n\beta}_{\alpha} \vec{E} \approx \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_0.$$

7.14

Здесь $\alpha = \varepsilon - 1 = n\beta = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 K_B T} = n\beta_0 + \frac{np^2}{3\varepsilon_0 K_B T},$

$n\beta_0$ - неполярная составляющая восприимчивости.

7.15

Поляризация ионных кристаллов.

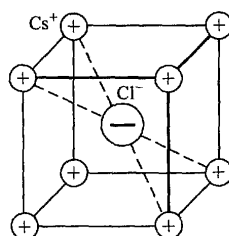


Рис. 65. Элементарная ячейка кристалла хлористого цезия CsCl

В кристаллических веществах возможно смещение положительной и отрицательной ионных подрешеток относительно друг друга под действием внешнего электрического поля. Такая поляризация называется ионной поляризацией.

7.16

Электрические свойства кристаллов. Пьезоэлектрики

У некоторых кристаллов в состоянии термодинамического равновесия решетки положительных и отрицательных ионов смещены, то есть они имеют спонтанную поляризацию, например, кристалл турмалина. (см. [3, Пьезоэлектричество])

7.17

Пьезоэлектрики. Прямой и обратный пьезоэффект и его применение.

У ряд кристаллов при деформациях возникает электрическая поляризация (прямой пьезоэффект) и наоборот при наложении электрического поля происходит деформация (обратный пьезоэффект). К таким веществам относятся кристаллы кварца, турмалина, сегнетовой соли, титаната бария и многие другие (см. [3, пьезоэлектричество]).

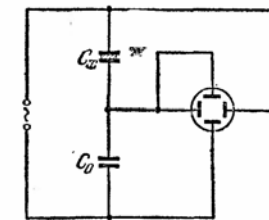
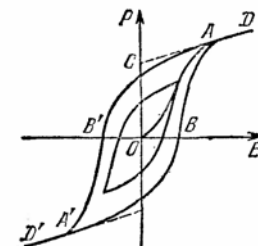
7.18

Сегнетоэлектрики. Их основные свойства. Доменная структура сегнетоэлектриков.

Некоторые кристаллические вещества (сегнетовая соль $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, титанат бария BaTiO_3 и др.) в некотором диапазоне температур находятся в состоянии спонтанной поляризации. В отличие от пьезоэлектриков вектор спонтанной поляризации может легко ориентирован относительно слабым электрическим полем. Эти вещества (сегнетоэлектрики) в некотором диапазоне температур имеют гигантские значения диэл. проницаемости $\varepsilon \sim 10000$. Зависимость $\vec{P}(\vec{E})$ является нелинейной, то есть восприимчивость $\alpha(\vec{E})$. Процесс поляризации имеет гистерезис.

7.19

Гистерезис. Точка Кюри сегнетоэлектриков.



7.20

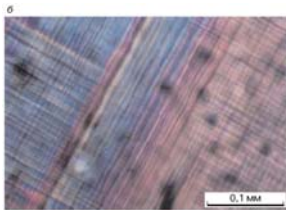


Рис. 3. Изображение доменной структуры микроскопически-статлов титаната бария (а) и сегнетовой соли (б) в поляризованном свете

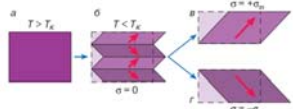
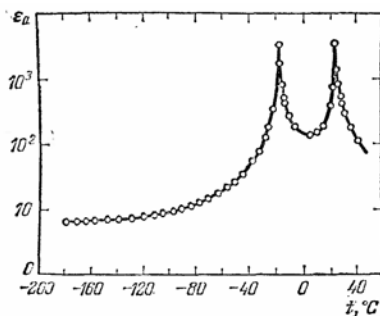


Рис. 2. Схематическое изображение возникновения (а, б) и перестройки (б-а, б-г) доменной структуры в сегнетоэлектрическом кристалле

7.21



Закон Кюри-Вейсса вблизи точек Кюри

$$\alpha = \frac{C'}{T'_K - T}, \quad \alpha = \frac{C}{T - T_K}.$$

Для сегнетовой соли $T'_K = -18^\circ\text{C}$, $T_K = 24^\circ\text{C}$.

7.22

Применение сегнетоэлектриков.

- Сегнетоэлектрики находят широкое применение при изготовлении малогабаритных конденсаторов в качестве нелинейных элементов радиотехнических устройств, в технике ультразвука. Во внешнем электрическом поле изменяются преломляющие свойства сегнетоэлектрических кристаллов (компоненты тензора показателя преломления): это явление используется для управления световыми пучками (оптические затворы, модуляторы и умножители частоты лазерного излучения и т.д.).

7.23

Лекция 8.

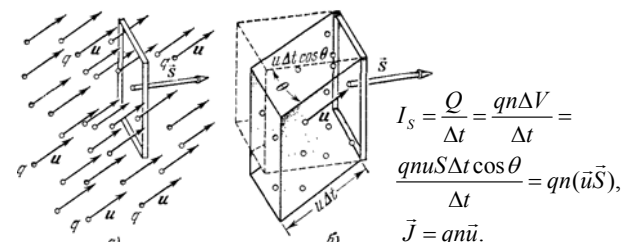
- Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока. Линии тока. Электрическое поле в проводнике с током и его источники. Уравнение непрерывности. Условие стационарности тока. Электрическое напряжение. Закон Ома для участка цепи. Электросопротивление. Закон Ома в дифференциальной форме. Удельная электропроводность вещества.

8.1

Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока

- Электрическим током называется любое упорядоченное движение электрических зарядов.
- Сила электрического тока через заданную поверхность определяется величиной заряда, проходящим через эту поверхность за единицу времени.
- Плотность тока это векторная величина, проекция которой на нормаль к элементарной поверхности равна величине электрического заряда, проходящего через единицу поверхности за единицу времени.

8.2



Если заряды движутся с разными скоростями

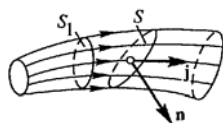
$$I_s = \sum_i qn_i(\vec{u}_i \vec{S}) = \vec{J} \vec{S}, \quad \text{где } \vec{J} = \sum_i qn_i \vec{u}_i - \text{плотность тока.}$$

$$\vec{J} = q \frac{\sum_i n_i \vec{u}_i}{n} = q \langle \vec{u} \rangle, \quad \text{где } n = \sum_i n_i; \quad \langle \vec{u} \rangle = \frac{\sum_i n_i \vec{u}_i}{n}.$$

8.3

Линии тока.

- Линии тока — это линии, касательные к которым направлены по направлению средней (или дрейфовой) скорости. Для стационарных токов вдоль этих линий движутся заряженные частицы.



Трубка тока

8.4

Уравнение непрерывности. Условие стационарности тока.

Согласно закону сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_V = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_{S_V} \vec{J} d\vec{S} = - \int_V \text{div} \vec{J} dV.$$

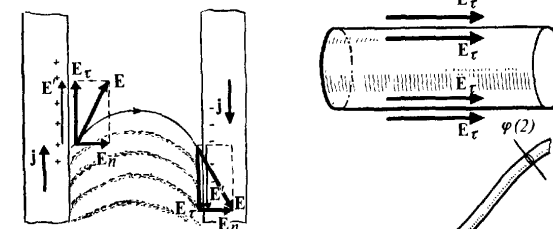
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0 - \text{уравнение непрерывности.}$$

В стационарном случае $\partial \rho / \partial t = 0$, следовательно

$$\text{div} \vec{J} = 0.$$

8.5

Электрическое поле в проводнике с током и его источники.



108

Демонстрация наличия нормальной составляющей напряженности поля вблизи поверхности проводника

$$\phi(1) - \phi(2) = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

8.6

Электрическое напряжение. Закон Ома для участка цепи. Электросопротивление.

Опыт показывает, что между током и напряжением на участке проводника существует однозначная зависимость $I = f(U)$.

Для многих проводников эта зависимость линейная

$$I = \Lambda \cdot U = \frac{1}{R} \cdot U,$$

где Λ и R - электрическая проводимость и сопротивление.

Единица сопротивления $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} / 1 \text{ А} = 1 \text{ В} / \text{А}$.

8.7

Удельное электрическое сопротивление

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Вещество	Удельное сопротивление ρ , Ом м	Вещество	Удельное сопротивление ρ , Ом м
Серебро	$(1,66 - 1,63) \cdot 10^{-8}$	10 %-ный водный раствор NaCl	0,0825
Медь тунутая	$1,78 \cdot 10^{-8}$	Химически чистая вода	$\sim 10^6$
Платина	$11,0 \cdot 10^{-8}$	Стекло натровое	$\sim 10^9$
Константан (сплав 60 % Cu, 40 % Ni)	$49,0 \cdot 10^{-8}$	Фарфор	$\sim 10^{13}$
Нихром (67,5 % Ni, 15 % Cr, 16 % Fe, 1,5 % Mn)	$110 \cdot 10^{-8}$	Янтари, плавленый кварц	$> 10^{18}$
Графит	$\sim 3 \cdot 10^{-5}$		

8.8

Удельное сопротивление зависит от температуры

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha \cdot (t - t_0)],$$

где α - температурный коэффициент сопротивления.

Для чистых металлов $\alpha \approx 1 / 273 \text{ K}^{-1} = 0,00367 \text{ K}^{-1}$.

Вещество	Температура, °C	Температурный коэффициент сопротивления α , K^{-1}
Серебро	0-100	$40 \cdot 10^{-4}$
Медь	18	$43 \cdot 10^{-4}$
Платина	0-100	$38 \cdot 10^{-4}$
Константан	18	(от $-0,4$ до $+0,1$) $\cdot 10^{-4}$ *)
10 %-ный водный раствор NaCl	18	-0,021
Графит	18	$-5 \cdot 10^{-4}$
Стекло	100	от -0,1 до -0,2

*) В зависимости от образца.

8.9

Сверхпроводимость.

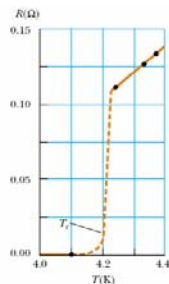


Figure 27.12 Resistance versus temperature for a sample of mercury (Hg). The graph follows that of a normal metal above the critical temperature T_c . The resistance drops to zero at T_c , which is 4.2 K for mercury.

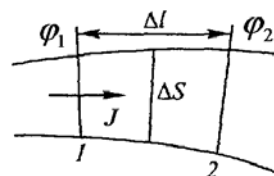
Table 27.3

Material	T_c (K)
$\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$	134
Ti-Ba-Ca-Cu-O	125
Bi-Sr-Ca-Cu-O	105
$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$	92
Nb_3Ge	23.2
Nb_3Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Su	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

8.10

Закон Ома в дифференциальной форме.

Удельная электропроводность вещества.



$$I = J \Delta S = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho \frac{\Delta l}{\Delta S}}$$

$$\frac{1}{\rho} \left(- \frac{d\varphi}{dl} \right) \Delta S = \frac{1}{\rho} E \Delta S.$$

$$J = \frac{1}{\rho} E = \lambda E, \text{ где } \lambda = \frac{1}{\rho} -$$

удельная электропроводность.

В векторной форме

$$\vec{J} = \lambda \vec{E} -$$

Закон Ома в дифференциальной форме.

8.11

Отсутствие в однородном проводнике объемных зарядов.

Для стационарных токов

$$\text{div} \vec{J} = 0 = \text{div}(\lambda \vec{E}) = \lambda \cdot \text{div} \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla \lambda).$$

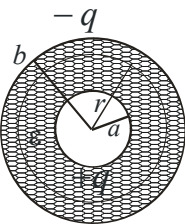
Если $\lambda = \text{const}$, то $\nabla \lambda = 0$. Следовательно

$$\text{div} \vec{E} = \rho_q / \epsilon_0 = 0.$$

Стационарные токи и электрическое поле в сплошных средах.

8.12

a) сопротивление сферического конденсатора с утечкой



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{b} \right),$$

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b} \right), \quad \frac{J}{\lambda} = E, \Rightarrow$$

$$q = 4\pi\epsilon_0\epsilon r^2 \frac{J}{\lambda} = \frac{\epsilon_0\epsilon}{\lambda} I, \text{ где } I = 4\pi r^2 J.$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{\epsilon_0\epsilon}{\lambda} I = R \cdot I, \text{ где сопротивление}$$

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \text{ Заметим, что емкость сферического конденсатора}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon / \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \text{ и } CR = \frac{\epsilon_0\epsilon}{\lambda} - \text{универсальное соотношение.}$$

8.13

b) сопротивление сферического конденсатора с утечкой (см. [2, стр. 121]).

8.14

Лекция 9.

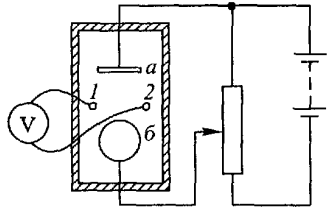
- Токи в сплошных средах. Заземление.
- Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца и его дифференциальная форма. Сторонние силы. ЭДС. Закон Ома для замкнутой цепи.
- Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Примеры их применения.

9.1

Электролитическая ванна.

В слабопроводящей среде справедливо соотношение

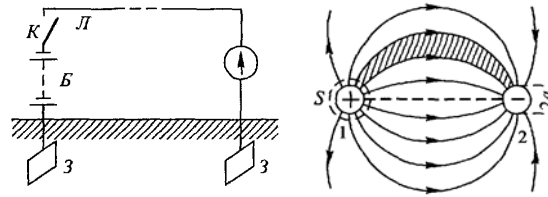
$$CR = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda}. \text{ Так как } CR = \frac{q}{U} \frac{U}{I}, \text{ то } q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda} I.$$



9.2

Заземление в линиях связи.

Электросопротивление сплошной среды.



$$U_{12} = \varphi_{1\infty} - \varphi_{2\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{q}{a} - \left(-\frac{q}{a} \right) \right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{a},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{a^2} = \frac{U_{12}}{2a}; \quad I = \frac{J}{\lambda E} \frac{4\pi a^2}{S} = \lambda \frac{U_{12}}{2a} \frac{4\pi a^2}{S} = \frac{2\pi\lambda a}{S} U_{12};$$

9.3

Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

Электрический ток в участке цепи совершает работу.

$$\Delta q = I \Delta t, \quad \Delta A = \Delta W = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U;$$

$$\Delta W = I \cdot \Delta t \cdot U = \Delta Q;$$

$$Q = I U t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t;$$

Мощность тока

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Q}{t} = I U = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

9.4

$$\frac{dQ}{dt} = I^2 R =$$

$$= (J \Delta S)^2 \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} =$$

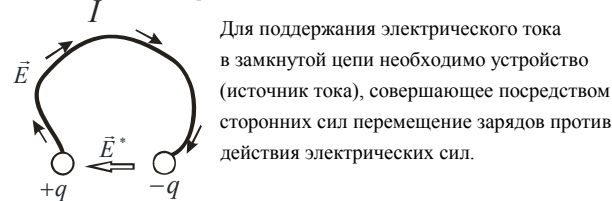
$$= J^2 \rho \cdot \frac{\Delta S \Delta l}{\Delta V}.$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{dQ}{dt} = J^2 \rho = J \frac{E}{\rho} \rho = J E = \vec{J} \vec{E}.$$

9.5

Сторонние силы. ЭДС.



Для поддержания электрического тока в замкнутой цепи необходимо устройство (источник тока), совершающее посредством сторонних сил перемещение зарядов против действия электрических сил.

$\vec{E}^*$ – сторонняя сила, действующая на единичный положительный заряд (напряженность сторонних сил),
 $\vec{E}$ – напряженность электрических сил

9.6

$$\int_1^2 q \vec{E} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$

$$\int_1^2 q \vec{E} d\vec{l} = - \int_1^2 \vec{F}_{mp} d\vec{l} = Q_{\text{джоулево тепло}},$$

$$Q_{\text{джоулево тепло}} = I^2 R t = q I R,$$

где R – сопротивление внешней цепи.

$$q \int \vec{E}^* d\vec{l} = - q \int \vec{E} d\vec{l} - \int \vec{F}_{mp} d\vec{l},$$

Замечание. $I r = I \rho \int \frac{d\vec{l}}{S} = \int \rho \frac{I}{S} d\vec{l} = \int \rho \vec{J} d\vec{l} \Rightarrow \rho \vec{J} = \vec{E} + \vec{E}^*$

9.7

В результате имеем

$$\mathcal{E} = U + I r = I R + I r$$

- закон Ома для замкнутой цепи.

$$\text{Здесь } \mathcal{E} = \int_2^1 \vec{E}^* d\vec{l} \text{ - электродвижущая сила (ЭДС),}$$

равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

9.8

Закон Ома для участка цепи с ЭДС

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}^*)$$

$$\int_1^2 \rho \vec{J} d\vec{l} = \int_1^2 \rho \frac{I}{S} d\vec{l} = I \int_1^2 \frac{\rho}{S} d\vec{l} = I(R + r);$$

$$I(R + r) = \underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_U + \mathcal{E}.$$

9.9

Правила Кирхгофа.

1) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.
 $I_1 + I_2 - I_4 = 0, \Rightarrow \sum_k I_k = 0.$

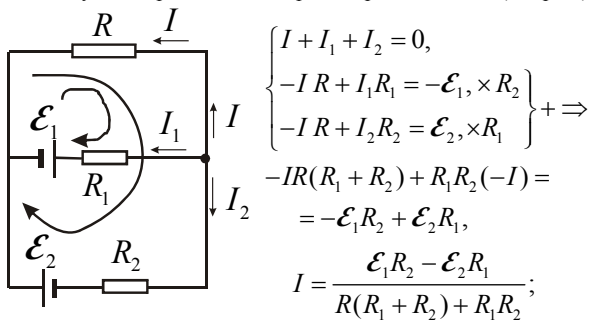
2) Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1, \\ -I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 - \mathcal{E}_2, \\ -I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 - \mathcal{E}_3, \end{cases} \Rightarrow \sum_n I_n R_n = \sum_k \mathcal{E}_k$$

9.10

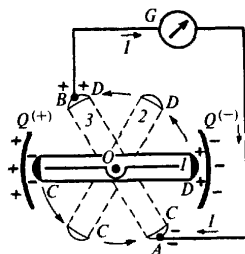
Пример применения правил Кирхгофа

Найти силу тока проходящего через сопротивление R (см. рис.)



9.11

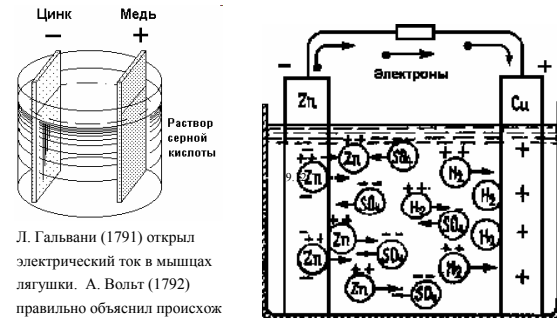
Примеры источников тока (ЭДС)



111
Схема электростатической машины

9.12

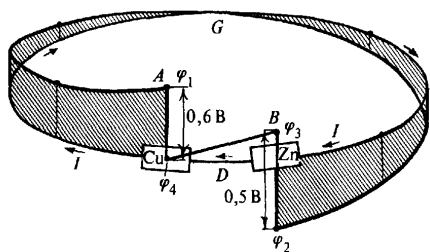
Гальванический элемент Вольта



Л. Гальвани (1791) открыл электрический ток в мышцах лягушки. А. Вольт (1792) правильно объяснил происхождение этого тока и создал химический элемент тока.

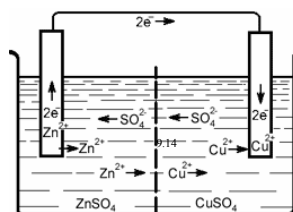
9.13

Изменение потенциала в цепи с гальваническим элементом.



9.14

Элемент Даниэля-Якоби



9.15

Свинцово-кислотный аккумулятор

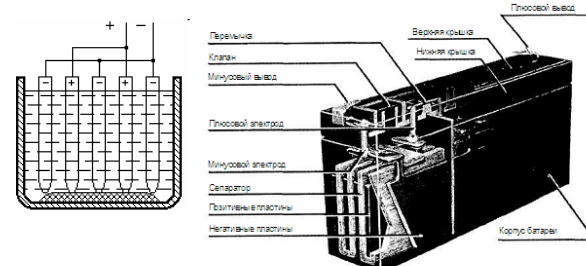
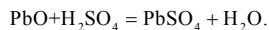


Рис. 3.2. Устройство VRLA-батареи Panasonic

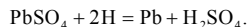
Решетчатые свинцовые пластины, заполненные пастой PbO, помещаются в 30% раствор H₂SO₄

9.16

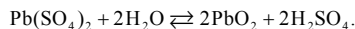
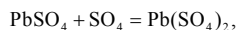
Происходит реакция



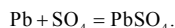
При зарядке ионы H⁺, двигаясь к катоду, приводят к реакции



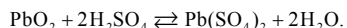
Ионы SO₄²⁻, достигая анода, вступают в реакцию



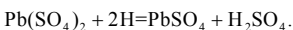
При разрядке на свинцовом катоде ионы SO₄²⁻ из раствора



На аноде идет обратная реакция



Ионы H⁺ из раствора нейтрализуются на аноде и вступают в реакцию

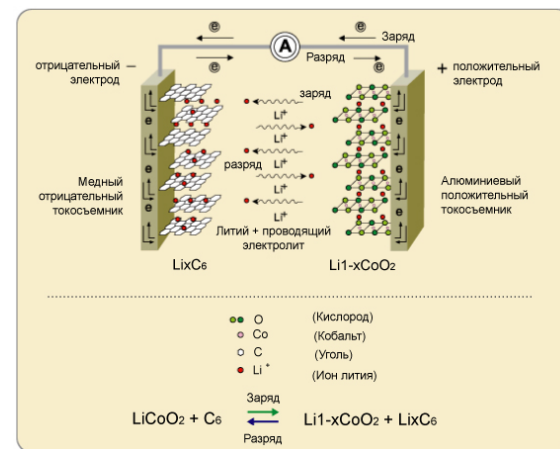


9.17

Li-Ion - литий-ионные аккумуляторы.

- Литий - наиболее химически активный металл. На его основе работают современные источники питания для ноутбуков. Практически все высокоплотные источники питания используют литий в силу его химических свойств.
- Килограмм лития способен хранить 3860 ампер-часов. Для сравнения, показатель цинка - 820, свинца - 260.
- В литий-ионных элементах ионы лития связаны молекулами графита C6 и литийкобальтоксида (LiCoO2)

9.18

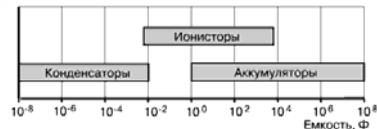


9.19

Сравнительные характеристики современных аккумуляторов

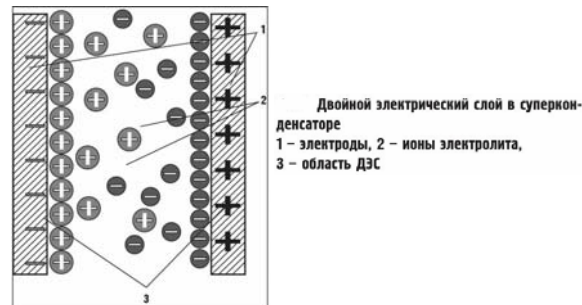
Сравнительные характеристики современных источников тока

Источники тока	Энергетическая мощность (Вт*час/кг)	Срок службы (число циклов заряд – разряд)
Свинцово-кислотные аккумуляторы	30	300
Никель-кадмиевые (Ni-Cd)	40-60	1500
Никель-металлгидридные (Ni-MH)	75	500
Ионно-литиевые аккумуляторы (Li-IH)	100	500
Полимерно-литиевые аккумуляторы	175	150



9.20

Суперконденсаторы(ионистеры).



9.21

Лекция 10.

- Электромагнетизм. Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока. Закон Био – Савара – Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции магнитного поля.
- Действие магнитного поля на ток. Закон Ампера.
- Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции. Вихревой характер магнитного поля. Уравнение $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Понятие о векторном потенциале.

10.1

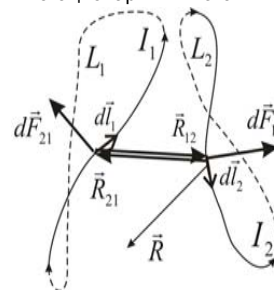
Магнитное взаимодействие.

- Исторически под магнитным взаимодействием понималось взаимодействие между намагниченным телом (намагниченный кусок железа) с другими железными телами. В 1820 году Х.К.Эрстед обнаружил, что магнитное взаимодействие может оказывать электрический ток. Поэтому под магнитными взаимодействиями понимается взаимодействие между токами, магнитными телами, токами и магнитными телами. В рамках представлений близкого действия это взаимодействие осуществляет магнитное поле. Почти одновременно с Эрстедом Закон взаимодействия стационарных токов был открыт благодаря исследованиям Ампера, Био, Савара и Лапласа.

10.2

Магнитостатика. Взаимодействие токов. Элемент тока.

- Магнитостатика изучает законы взаимодействия между неподвижными магнитными телами и проводниками со стационарными токами.



$Id\vec{l}_1$ - элемент тока.

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{[I_1 d\vec{l}_1, [I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3},$$

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, [I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3}.$$

10.3

$$\vec{F}_{21} = k \int \int_{L_1 L_2} \frac{[I_1 d\vec{l}_1, [I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3},$$

$$\vec{F}_{12} = \int \int_{L_2 L_1} k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, [I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3}.$$

Отметим, что $d\vec{F}_{21} \neq d\vec{F}_{12}$, однако для замкнутых токов $\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$.

10.4

В абсолютной магнитной (электромагнитной) системе единиц СГСМ единица силы тока или заряда выбирается из условия $k = 1$ и обозначается 1СГСМ_I. Отношение

$$\frac{1\text{СГСМ}_I}{1\text{СГСМ}_I} = c - \text{электродинамическая постоянная,}$$

равная скорости света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. В системе

$$\text{единиц СИ} \quad k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}.$$

$$d\vec{F}_{21} = [I_1 d\vec{l}_1, k \underbrace{\frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3}}_{d\vec{B}_2}]; \quad d\vec{F}_{12} = [I_2 d\vec{l}_2, k \underbrace{\frac{[I_1 d\vec{l}_1, \vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3}}_{d\vec{B}_1}].$$

10.5

Закон Био-Савара-Лапласа и его полевая трактовка. Вектор индукции магнитного поля.

С точки зрения полевой трактовки взаимодействия токов величину

$$d\vec{B}_2 = k \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3}$$

можно интерпретировать как силовую характеристику магнитного поля, создаваемого элементом тока $I_2 d\vec{l}_2$ в пространственной точке, определяемой $\vec{R}_{21}$. Эта величина называется вектором индукции магнитного поля элемента тока $I_2 d\vec{l}_2$ в точке $\vec{R}_{21}$.

10.6

В произвольной точке пространства $\vec{R}$ элемент тока $I_2 d\vec{l}_2$ создаст магнитное поле с индукцией $d\vec{B}$, равной

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}]]}{R^3}.$$

Эта формула получила название закона Био-Савара-Лапласа.

Величина индукции магнитного поля $\vec{B}_2$ в точке $\vec{R}_{21}$, создаваемого током всего контура I_2 , согласно принципу суперпозиции равна

$$\vec{B}_2 = \sum d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_2} \frac{[I_2 d\vec{l}_2, \vec{R}_{21}]]}{R_{21}^3}.$$

Тогда сила действия магн. поля $\vec{B}_2$ на элемент тока $I_1 d\vec{l}_1$ равна: $d\vec{F}_{21} = [I_1 d\vec{l}_1, \vec{B}_2]$ - закон Ампера (сила Ампера).

10.7

Пример расчета индукции магнитного поля с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

$$d\vec{l} = dz, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3};$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \cdot R \cdot \sin(\alpha + 90^\circ)}{R^3}.$$

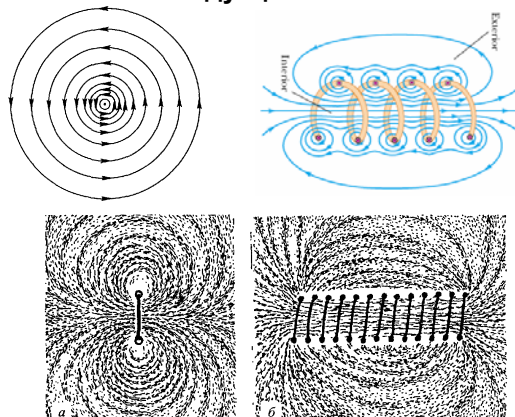
$$z = r \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad dz = r \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \quad R \cos \alpha = r.$$

$$B = \int dB = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi/2} \frac{R \cos \alpha}{R^3} dz = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{R^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha =$$

$$= 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r};$$

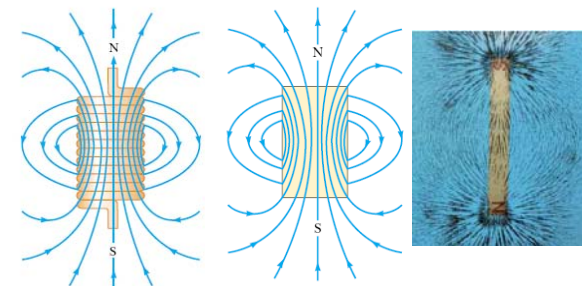
10.8

Линии индукции магнитного поля



10.9

Линии магнитной индукции соленоида и полосового магнита идентичны.



10.10

Закон Био-Савара-Лапласа для элемента объемного тока.

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad I d\vec{l} = \vec{J} \Delta V, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{J}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} \Delta V;$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{J}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

10.11

Векторный потенциал магнитного поля тока.

$$\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{R}}{R^3}; \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2}} = \right.$$

$$\left. = -\frac{1}{2} \frac{2(x-x')}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\vec{J}(\vec{r}'), \frac{\vec{R}}{R^3}] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R}, \vec{J}(\vec{r}')] dV'$$

$$[\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R}, \vec{J}(\vec{r}')] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{J_x}{R} & \frac{J_y}{R} & \frac{J_z}{R} \end{vmatrix} = [\nabla, \frac{\vec{J}}{R}] = \operatorname{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}}{R};$$

10.12

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}}{R} dV' = \operatorname{rot}_{\vec{r}} \int_V \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{R}}_{\vec{A}(\vec{r})} dV' = \operatorname{rot} \vec{A};$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{R} dV' - \left(\begin{array}{l} \text{векторный потенциал} \\ \text{магнитного поля } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \end{array} \right)$$

1) Представление $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ неоднозначно, $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \varphi$, так как $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) \equiv 0$.

10.13

Вихревой характер магнитного поля.

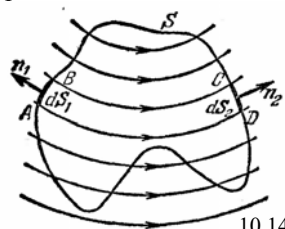
2) $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) \equiv 0$, так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \equiv 0,$$

то есть магнитное поле вихревое поле.

По формуле Гаусса

$$\int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = 0.$$



10.14

$$3) \operatorname{div}_{\vec{r}} \vec{A} = \operatorname{div}_{\vec{r}} \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\operatorname{div}_{\vec{r}'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\operatorname{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}')}_{0 \text{ для стационарного тока}} \right) dV' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_V} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{S}' = 0, \text{ так как } J_n = 0.$$

Имеем $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

10.15

Уравнение для векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad \text{Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет эта функция?}$$

Аналогия с электростатикой

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \Rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$A(\vec{r})_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(\vec{r}')_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \Rightarrow \Delta A_x = -\mu_0 J_x;$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}.$$

10.16

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в дифференциальной и интегральной форме.

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{A}}_0 - \underbrace{\Delta \vec{A}}_{-\mu_0 \vec{J}} = \mu_0 \vec{J};$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \begin{cases} \text{Дифференциальная форма теоремы о} \\ \text{циркуляции вектора магнитной индукции.} \end{cases}$$

По формуле Стокса

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S_L} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \sum_{S_L} I;$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S}; \begin{cases} \text{Интегральная форма теоремы о цир-} \\ \text{куляции вектора магнитной индукции.} \end{cases}$$

10.17

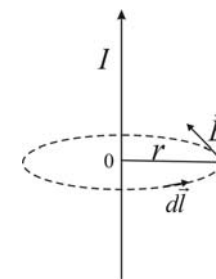
Система полевых уравнений магнитостатики в вакууме в дифференциальной и интегральной формах.

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0, \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \end{cases} \quad \begin{cases} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0, \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \text{rot } \vec{E} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \int_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}, \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Система полевых уравнений} \\ \text{электростатики в вакууме} \end{cases}$$

10.18

Пример решения задач магнитостатики с помощью теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля.



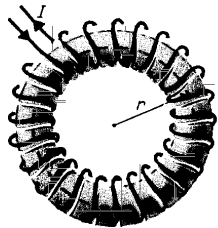
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{S_L} I;$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

10.19

Магнитное поле тороида

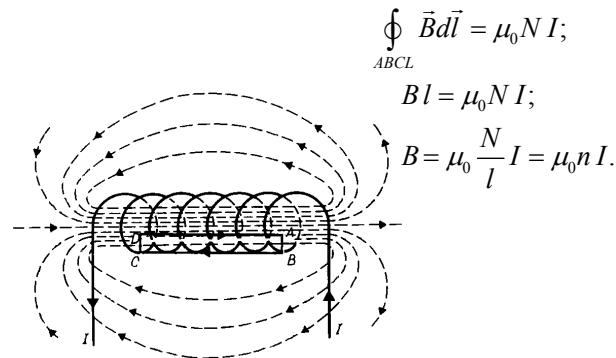


$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I;$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 n I.$$

10.20

Магнитное поле соленоида



$$\oint_{ABCL} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 N I;$$

$$B l = \mu_0 N I;$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I.$$

10.21

Релятивистская природа магнитных взаимодействий на примере взаимодействия двух однородно заряженных тонких бесконечных стержней.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi R \epsilon_0} \gamma_2; \\ f_k &= \gamma_1 \cdot E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R}; \\ I_1 &= \gamma_1 V; I_2 = \gamma_2 V; \\ B_1 &= \frac{1}{2\pi R} \mu_0 I_1; B_2 = \frac{1}{2\pi R} \mu_0 I_2; \\ f_A &= I_1 B_2 = I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2; f = f_k - f_A = \\ &= \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2 = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} (1 - \epsilon_0 \mu_0 V^2) < f_k; \end{aligned}$$

10.22

На самом деле из-за релятивистских эффектов $f'_k > f_k$,

$$\text{так как } l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \text{ то } \gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \gamma'_2 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

$$f = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} \frac{(1 - \epsilon_0 \mu_0 V^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad \text{Если } \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

$$\text{то } f = f'_k - f_A = f_k.$$

$$f_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} V^2 = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{R} \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} V^2 = f_k \frac{V^2}{c^2}.$$

Сила Ампера является релятивистской поправкой

$\sim V^2 / c^2$ к статической силе Кулона.

10.23

Лекция 11.

- Элементарный ток и его магнитный момент. Поле элементарного тока. Магнитное поле движущегося заряда. Силы, действующие на токи в магнитном поле. Определение единицы силы тока — ампера. Элементарный ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Эффект Холла.

11.1

Элементарный ток и его магнитный момент. Векторный потенциал элементарного тока.

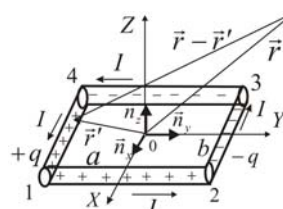
Элементарный ток - это линейный замкнутый ток, обтекающий поверхность с бесконечно малыми линейными размерами.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad A(\vec{r})_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl'_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{c^2} \int_L \frac{Idl'_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \text{где } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}; \end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\gamma(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad \text{Функция } A(\vec{r})_x \text{ равна } \varphi(\vec{r}) \text{ при } \gamma(\vec{r}') dl' = Idl'_x / c^2.$$

11.2

Выберем контур элем. тока. в виде прямоугольника со сторонами a и b .



$$q_{14} = \frac{I}{c^2} b; \quad q_{23} = -\frac{I}{c^2} b;$$

$$\vec{p}_q^1 = -q_{14} a \vec{n}_y = -\frac{I}{c^2} b a \vec{n}_y =$$

$$= -\frac{p_m}{c^2} \vec{n}_y, \text{ где } p_m = IS - \text{ магнитный момент элементарного тока.}$$

Аналогично находим:

$$A_x = \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_q^1 \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_m y}{c^2 r^3}; \quad A_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_m x}{c^2 r^3}; \quad A_z = 0.$$

Если ввести вектор $\vec{p}_m = p_m \vec{n}_z = IS \vec{n}_z$, то $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3}$.

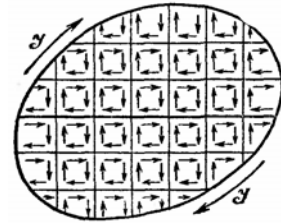
Здесь учтено равенство $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$.

11.3

Действительно

$$\frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3} = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ 0 & 0 & p_m \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix}.$$

Элементарный ток произвольной формы можно свести к совокупности прямоугольных элем. токов



$$\vec{p}_m = \sum_n \vec{p}_n = \sum_n I \vec{S}_n =$$

$$= I \sum_n \vec{S}_n = I \vec{S}.$$

11.4

Поле элементарного тока.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = [\nabla, \vec{A}] = [\nabla, \frac{\mu_0}{4\pi} [\frac{\vec{p}_m}{r^3}, \frac{\vec{r}}{r^3}]] =$$

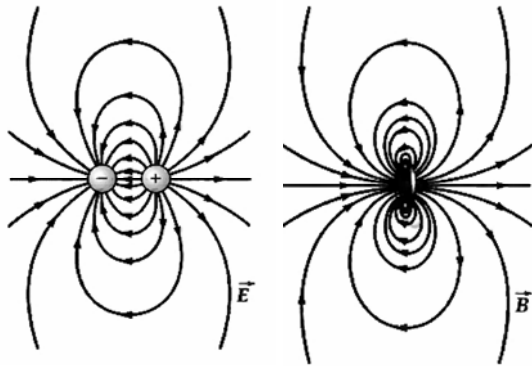
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} (\underbrace{\vec{p}_m (\nabla \frac{1}{r^3})}_{0} - (\vec{p}_m \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3});$$

$$(\nabla \frac{1}{r^3}) = \frac{(\nabla \vec{r})}{r^3} + (\vec{r} \nabla) \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{(\vec{r} \cdot 3\vec{r})}{r^5} = 0.$$

$$(\vec{p}_m \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{(\vec{p}_m \nabla) \vec{r}}{r^3} + \vec{r} (\vec{p}_m \nabla) \frac{1}{r^3} = \frac{\vec{p}_m}{r^3} - \vec{r} (\vec{p}_m \frac{3\vec{r}}{r^5});$$

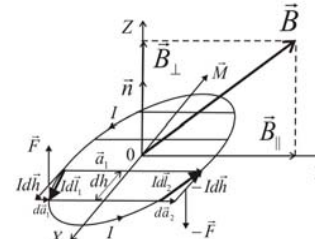
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right).$$

11.5



11.6

Элементарный ток в магнитном поле.



$$\vec{F} = [Id\vec{l}, \vec{B}] =$$

$$[(Id\vec{h} + Id\vec{a}), \vec{B}] = [Id\vec{h}, \vec{B}];$$

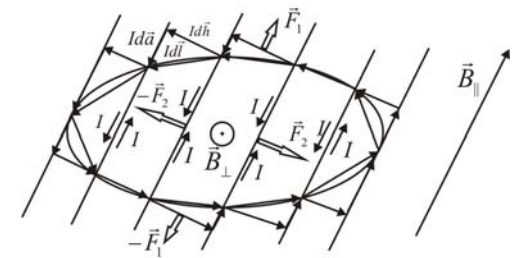
$$-\vec{F} = [Id\vec{l}_2, \vec{B}] = [-Id\vec{h}, \vec{B}];$$

$$d\vec{M} = [\vec{a}_1, \vec{F}] = [\vec{a}_1, [-Id\vec{h}, \vec{B}]] =$$

$$= \frac{[\vec{n}, \vec{B}]}{B_{\parallel}} I d\vec{h} a_1 B_{\parallel} = \frac{[I \Delta S \vec{n}, \vec{B}]}{\Delta S};$$

$$\vec{M} = \sum d\vec{M} = [I \sum \Delta S \vec{n}, \vec{B}] = [\vec{p}_m, \vec{B}];$$

11.7



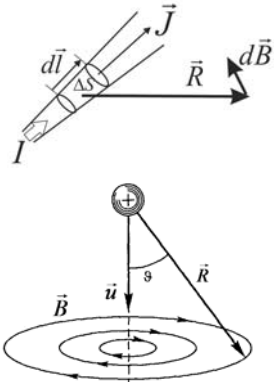
$$\vec{M} = \sum d\vec{M} = [I \sum \Delta S \vec{n}, \vec{B}] = [\vec{p}_m, \vec{B}] = [\vec{p}_m, \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}] = [\vec{p}_m, \vec{B}];$$

В однородном поле, сила действующая на контур с током, равна

$$\vec{F} = \sum [Id\vec{l}, \vec{B}] = I [\sum d\vec{l}, \vec{B}] = 0.$$

11.8

Магнитное поле движущегося заряда



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{J}, \vec{R}]}{R^3} dV;$$

$$\vec{J} = qn\vec{u};$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} q n dV;$$

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3};$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qu \sin \vartheta}{R^2};$$

11.9

Движущийся заряд создает элемент тока $q\vec{u}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{1/c^2} [\vec{u}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{R}}{R^3}] = \frac{1}{c^2} [\vec{u}, \vec{E}];$$

11.10

Силы, действующие на токи в магнитном поле.

Сила Лоренца.

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}] = [\vec{J}, \vec{B}] dV; \quad \vec{F}_A = I \int_L [d\vec{l}, \vec{B}] = \int_V [\vec{J}, \vec{B}] dV.$$

Так как элемент тока движущегося заряда $Id\vec{l} = q\vec{u}$, то сила, действующая на движущий заряд в магнитном поле, равна

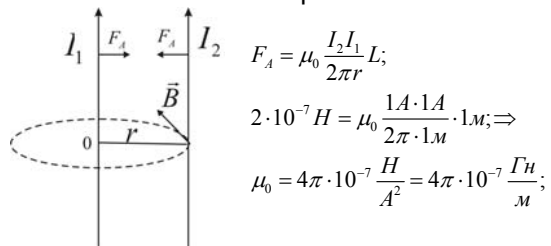
$$\vec{F} = q[\vec{u}, \vec{B}].$$

Если имеется и электрическое поле, то

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u}, \vec{B}] - \text{ Сила Лоренца.}$$

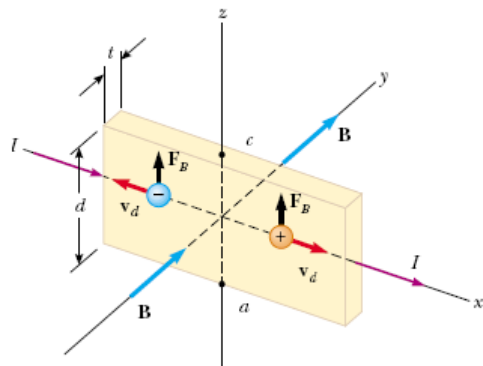
11.11

Определение единицы силы тока — Ампера.

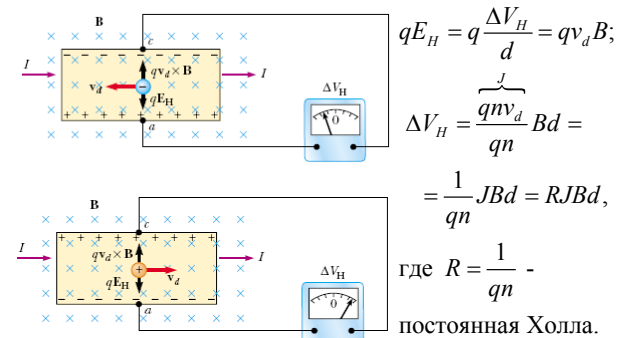


11.12

Эффект Холла.

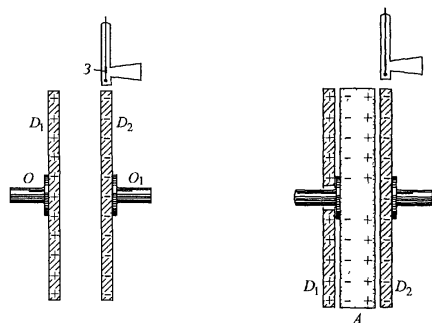


11.13



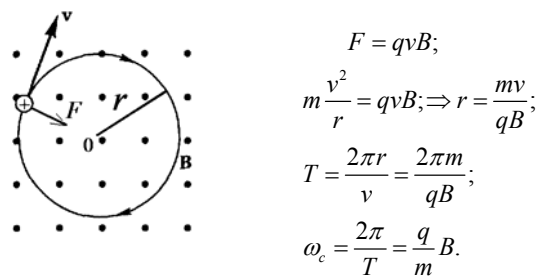
11.14

Опыты Роуланда и Эйхенвальда. (А.А.Эйхенвалд, 1901 г.)

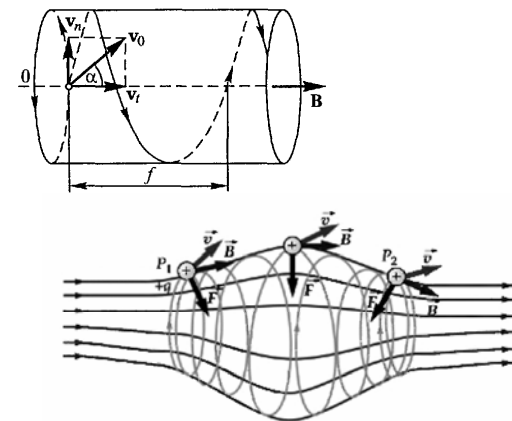


11.15

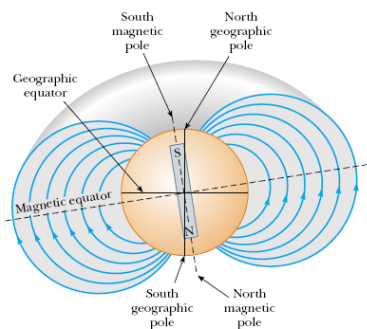
Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.



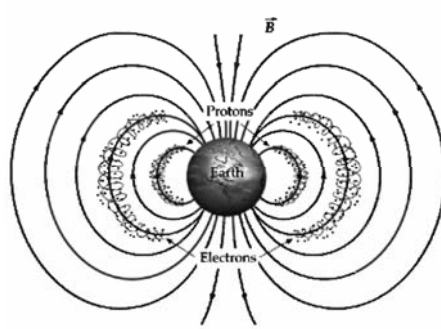
11.16



11.17

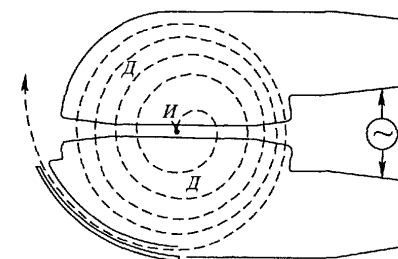


11.18



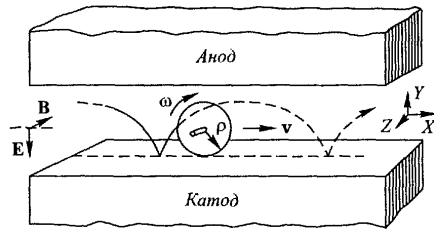
11.19

Принцип действия циклотрона

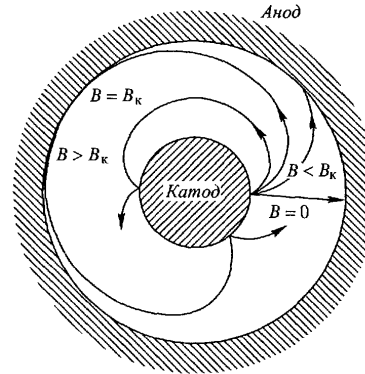


11.20

Магнетрон

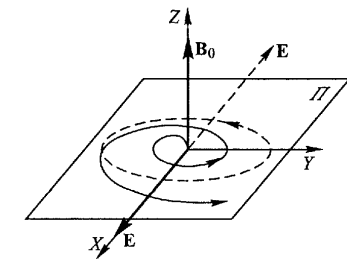


11.21



11.22

Циклотронный резонанс.



11.23

In an experiment designed to measure the magnitude of a uniform magnetic field, electrons are accelerated from rest through a potential difference of 350 V. The electrons travel along a curved path because of the magnetic force exerted on them, and the radius of the path is measured to be 7.5 cm.



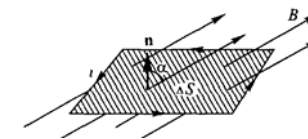
11.24

Лекция 12.

- Работа сил Ампера. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток). Потенциальная функция тока. Взаимодействие двух контуров с током. Коэффициент взаимной индукции двух контуров. Учет собственного поля уединенного контура с током. Коэффициент самоиндукции (индуктивность).

12.1

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток).

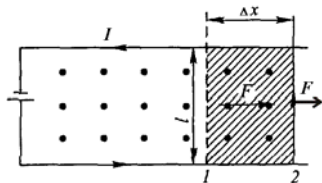


$$\Delta\Phi = B\Delta S \cos \alpha = \vec{B}\Delta\vec{S} = B_n \Delta S;$$

$$\Phi_S = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

12.2

Работа сил Ампера. Потенциальная функция тока.



$$F = I\Delta B,$$

$$\Delta A = F\Delta x = I\Delta B\Delta x = I\Delta\Phi_{\text{бок.}} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi.$$

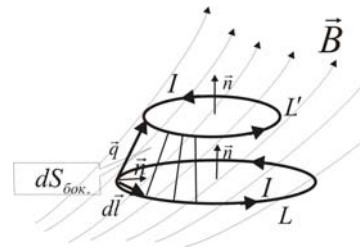
Определим потенциальную функцию тока

$$U = -I\Phi, \text{ тогда}$$

$\Delta A = F\Delta x = -\Delta U$, из этого соотношения имеем

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

12.3



$$dA = (\vec{q} d\vec{F}) = (\vec{q} \cdot [I d\vec{l}, \vec{B}]) = I(\vec{B} \cdot [\vec{q}, d\vec{l}]) = I(\vec{B} d\vec{S}_{\text{бок.}});$$

$$\Delta A = I \oint_{S_{\text{бок}}} (\vec{B} d\vec{S}) = I \Delta\Phi_{\text{бок.}}$$

$$\Phi_L = \int_{S_L} \vec{B} d\vec{S}; \quad \Phi_{L'} = \int_{S_{L'}} \vec{B} d\vec{S},$$

$$\Phi_L + \Delta\Phi_{\text{бок.}} = \Phi_{L'}; \Rightarrow \Phi_{L'} - \Phi_L = \Delta\Phi_L = \Delta\Phi_{\text{бок.}}$$

$$\text{Имеем } dA = I d\Phi_L = -dU_{I=\text{const}}, \text{ где } U = -I\Phi_L$$

12.4

Используя потенциальную или силовую функцию, можно рассчитать обобщенные силы, действующие на контур с током.

$$dA = \sum_{i=1}^N F_i d\xi_i = -dU(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \Big|_{I=\text{const}} d\xi_i;$$

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \Big|_{I=\text{const}}.$$

12.5

Пример

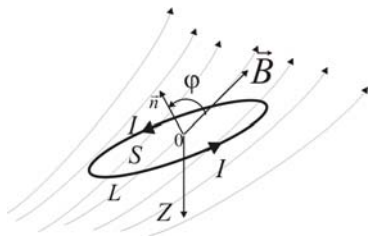
$$dA = M_z d\varphi =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi;$$

$$U = -I\Phi =$$

$$= -IBS \cos \varphi;$$

$$M_z = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\underbrace{IS}_{p_m} B \sin \varphi; \Rightarrow \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}];$$



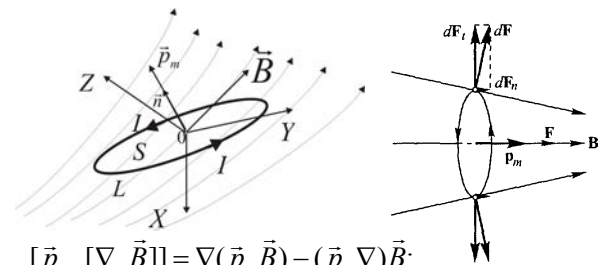
12.6

Сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Для элементарного тока, когда $I = const$ и $S = const$, потенциальная функция будет равна энергии взаимодействия элементарного тока или магнитного момента с внешним полем

$$U = W = -(\vec{p}_m \vec{B}); \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}; \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}; \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{p}_m \vec{B});$$

12.7



$$[\underbrace{\vec{p}_m}_a, [\underbrace{\nabla}_b, \underbrace{\vec{B}}_c]] = \nabla(\vec{p}_m \vec{B}) - (\vec{p}_m \nabla) \vec{B};$$

$$F = \nabla(\vec{p}_m \vec{B}) = (\vec{p}_m \nabla) \vec{B} + \underbrace{[\vec{p}_m, [\nabla, \vec{B}]]}_{\text{rot } \vec{B}};$$

Если $\text{rot } \vec{B} = 0$, то $F = (\vec{p}_m \nabla) \vec{B}$.

12.8

Коэффициент взаимной индукции двух контуров.

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \int_{S_1} \underbrace{\vec{B}_2}_{\text{rot } \vec{A}_2} d\vec{S}_1 = \\ &= \oint_{l_1} \vec{A}_2 d\vec{l} = \\ &= \oint_{l_1} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2}{R_{21}} \right) d\vec{l}_1 = \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 d\vec{l}_1}{R_{21}} \right)}_{L_{12}} I_2 = L_{12} I_2; \end{aligned}$$

12.9

Аналогично получим

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \text{ где } L_{21} = L_{12}.$$

Коэффициент самоиндукции (индуктивность).

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{S_i} \vec{B} d\vec{S} = L \cdot I; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_i \frac{I[d\vec{l}', \vec{R}]}{R^3}, \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_i \frac{I[d\vec{l}', (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_r \frac{dV' [\vec{J}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned}$$

12.10

Коэффициенты индуктивности контуров с токами.

$$\Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2; \quad \Phi_2 = L_{22} I_2 + L_{21} I_1;$$

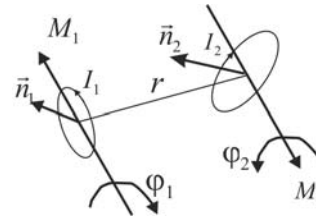
$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j; \quad L_{ij} = L_{ji};$$

12.11

Взаимодействие двух контуров с током.

$$\begin{aligned} d\vec{r}_2 &= -d\vec{r}_1; \\ \text{Проекция на } r: \quad dr_2 &= -dr_1. \\ F_1 &= -\frac{\partial U_1}{\partial r_1} = I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial r_1}; \\ F_2 &= -\frac{\partial U_2}{\partial r_2} = I_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial r_2}; \\ L_{12} &= L_{21}; \quad \frac{\partial L_{21}}{\partial r_2} = -\frac{\partial L_{12}}{\partial r_1}; \quad F_1 = -F_2; \end{aligned}$$

12.12



$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= -d\varphi_2; \\ M_1 &= -\frac{\partial U_1}{\partial \varphi_1} = I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_1}; \\ M_2 &= -\frac{\partial U_2}{\partial \varphi_2} = I_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} = I_2 I_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial \varphi_2}; \\ \text{так как } \frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_2} &= -\frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi_1}; \quad M_1 = -M_2; \end{aligned}$$

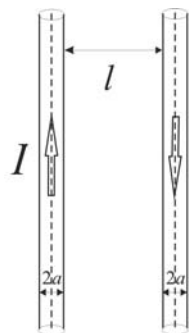
12.13

Пример задачи на вычисление коэффициентов индуктивности.

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= B_2 N_2 \pi r_2^2 + B_1 N_2 \pi r_1^2 = \\ &= \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_2 \pi r_2^2 + \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_2 \pi r_1^2; \\ &= \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_2 \pi r_2^2}{l}}_{L_{22}} I_2 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_1^2}{l}}_{L_{21}} I_1; \\ \Phi_1 &= B_1 N_1 \pi r_1^2 + B_2 N_1 \pi r_1^2 = \frac{\mu_0 N_1}{l} I_1 N_1 \pi r_1^2 + \frac{\mu_0 N_2}{l} I_2 N_1 \pi r_1^2 = \\ &= \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_1 \pi r_1^2}{l}}_{L_{11}} I_1 + \underbrace{\frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi r_1^2}{l}}_{L_{12}} I_2; \quad L_{12} = L_{21}; \end{aligned}$$

12.14

Индуктивность двухпроводной линии из пустотелых проводников.



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I; \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \int_a^{l+a} B dr =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_a^{l+a} \frac{1}{r} dr = I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right);$$

$$\Phi = 2\Phi_1 = \underbrace{\frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right)}_L I$$

12.15

Лекция 13.

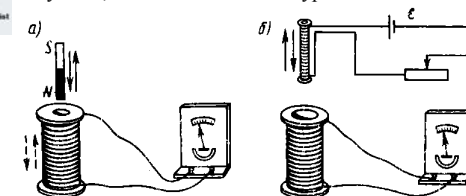
- Электромагнитная индукция. Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в дифференциальной форме. Правило Ленца. Индукционные методы измерения магнитных полей. Токи Фуко.
- Явление самоиндукции. Экстратоки замыкания и размыкания.
- Магнитная энергия тока. Магнитная энергия системы контуров с током. Энергия магнитного поля. Её объемная плотность.

13.1

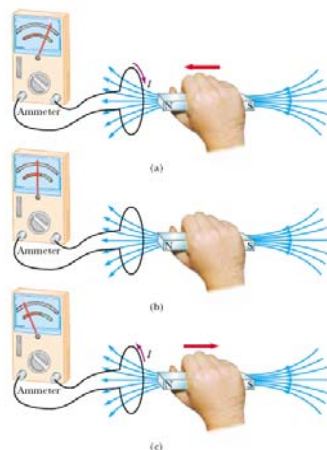
Электромагнитная индукция.



М. Фарадей в 1831 году экспериментально открыл явление электромагнитной индукции, состоящее в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром.



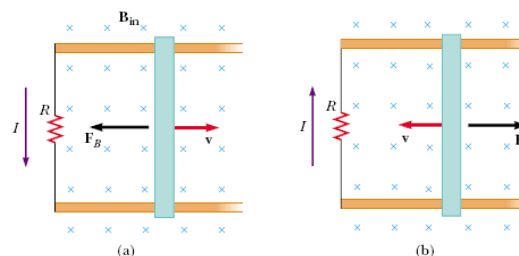
13.2



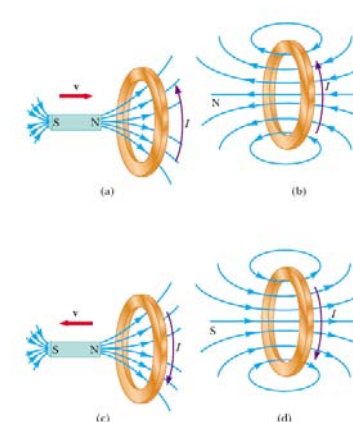
13.3

Правило Ленца.

Индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. (Э.Х.Ленц (1804-1865) в 1833 году)



13.4



Индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока.

13.5

Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в интегральной форме.

Современную математическую форму закона электромагнитной индукции Фарадея предложил в 1845 году Ф.Э.Нейман (1798-1895).

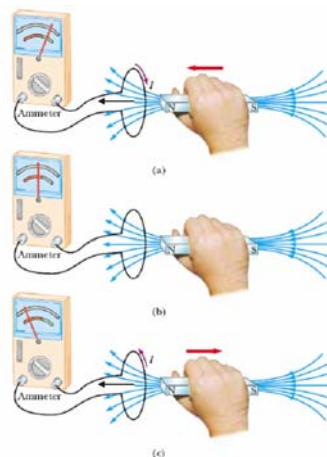
$$\mathcal{E} = f \frac{d\Phi}{dt},$$

где f - множитель пропорциональности, зависящий от выбора единиц. В системе единиц СИ $f = 1$.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где знак минус согласует знаки ЭДС индукции и изменения потока магнитной индукции.

13.6

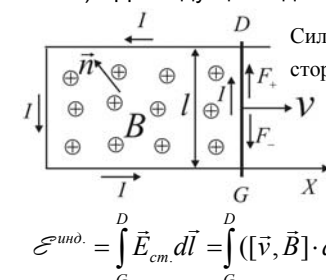


Выбор положительной нормали к поверхности контура определяет положительное направление проекции вектора индукции магнитного поля (положительное значение потока магнитного поля) и тока (или ЭДС) индукции. В приведенной записи закон электромагнитной индукции соответствует правилу Ленца.

13.7

Вывод формулы для ЭДС индукции:

1) ЭДС индукции в движущихся проводниках.



Сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ – сторонняя сила, создающая ЭДС.

$$\vec{E}_{cm.} = \frac{\vec{F}}{q} = [\vec{v}, \vec{B}].$$

$$\mathcal{E}_{ind.} = \int_G^D \vec{E}_{cm.} \cdot d\vec{l} = \int_G^D ([\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}) = vBl = \frac{d(xBl)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt};$$

Знак минус означает, что $\vec{n}$ и $\vec{B}$ противоположны по направлению, то есть $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS \cos 180^\circ = -BS$.

13.8

2) Вывод формулы для ЭДС индукции из закона сохранения энергии (Метод Гельмгольца).

Пусть виток с током движется в стационарном магнитном поле. Тогда амперовы силы совершают работу: $\Delta A = I \Delta \Phi$, и в контуре выделится джоулево тепло: $\Delta Q = I^2 R \Delta t$. Источником этой работы и тепловой энергии является ЭДС сторонних сил в контуре

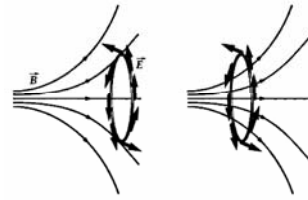
$$\mathcal{E} \cdot I \Delta t = \Delta Q + \Delta A = I^2 R \Delta t + I \Delta \Phi; \Rightarrow I = \frac{1}{R} \left(\mathcal{E} - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right);$$

Следовательно, в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

13.9

Закон электромагнитной индукции Фарадея и его формулировка в дифференциальной форме.



Максвелловская трактовка электромагнитной индукции.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}; \quad \Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

По формуле Стокса $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

13.10

Непотенциальность индукционного электрического поля.

Так как $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$, то $\text{rot} \vec{E} \neq 0$.

Следовательно, $\vec{E} \neq -\text{grad} \varphi$ и $\oint_L \vec{E} d\vec{l} \neq 0$.

13.11

Векторный и скалярный потенциал нестационарного электромагнитного поля.

В нестационарном случае магнитное поле остается вихревым, то есть $\text{div} \vec{B} = 0$. Следовательно, $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$. Тогда, по закону электромагнитной индукции,

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{A} = - \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \Rightarrow$$

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0; \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi, \text{ то есть } \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

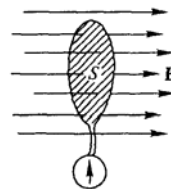
Выбор потенциалов φ и $\vec{A}$ неоднозначен (калибровочные преобразования)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} =$$

$$= -\nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

13.12

Индукционные методы измерения магнитных полей.



Принцип флюксметра

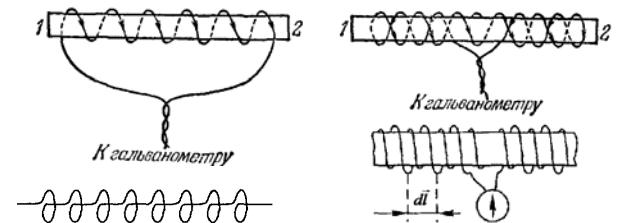
$$I = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}; \quad q = \int I dt = - \frac{1}{R} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{\Phi}{R}.$$

На этом соотношении основано определение единицы магнитного потока в системе СИ: Вебер - магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит количество электричества 1 Кл.

Отсюда следует определение единицы СИ для магнитной индукции: Тесла - магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м² равен 1 Вб.

13.13

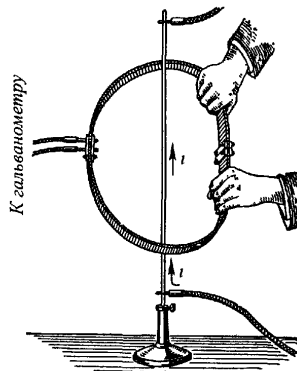
Пояс Роговского



$$\Phi = \int_1^2 S n \vec{B} d\vec{l} = S n \int_1^2 \vec{B} d\vec{l}; \Rightarrow \int_1^2 \vec{B} d\vec{l} = \frac{\Phi}{S n} = \frac{R}{S n} q = a q,$$

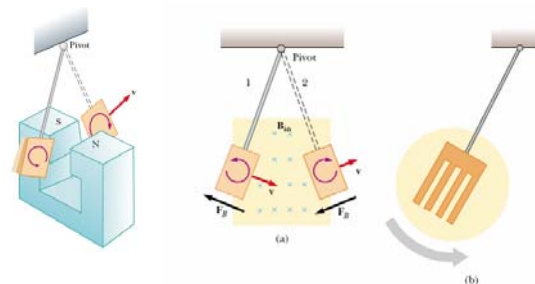
где a - постоянная баллистического гальванометра.

13.14

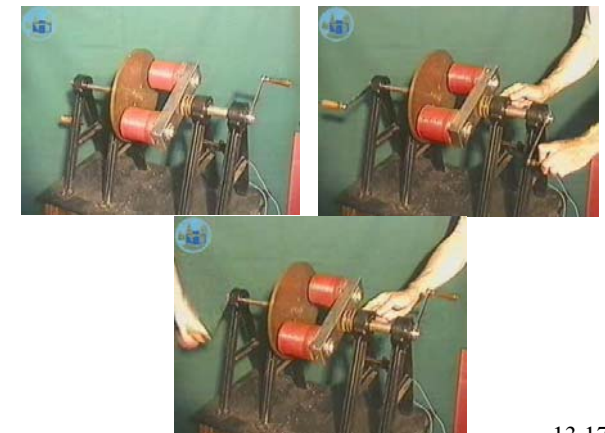


13.15

Токи Фуко (вихревые токи).



13.16



13.17

Магнитная энергия тока.

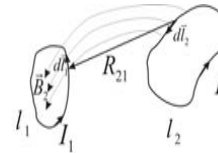
$$dA = -\mathcal{E}_{\text{инд.}} Idt = \frac{d\Phi}{dt} Idt = Id\Phi;$$

$$\Phi = LI; \Rightarrow dA = dW = I \cdot LdI = d\left(\frac{LI^2}{2}\right);$$

$$W = L \int_0^I IdI = \frac{LI^2}{2};$$

13.18

Магнитная энергия системы контуров с током.

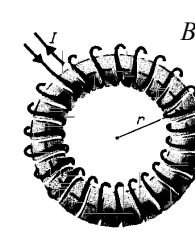


$$\begin{aligned} dW_1 &= I_1 d\Phi_1 = I_1 d(L_{11}I_1 + L_{12}I_2); \\ dW_2 &= I_2 d\Phi_2 = I_2 d(L_{22}I_2 + L_{21}I_1); \\ dW &= dW_1 + dW_2 = L_{11}d\left(\frac{I_1^2}{2}\right) + \\ &+ L_{12}I_1dI_2 + L_{22}d\left(\frac{I_2^2}{2}\right) + L_{21}I_2dI_1 = d\left(\frac{L_{11}I_1^2}{2} + \right. \\ &+ \left. \frac{d(L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1)}{2} + d\left(\frac{L_{22}I_2^2}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{ij}I_iI_j\right); \\ W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_{ij}I_iI_j; \end{aligned}$$

13.19

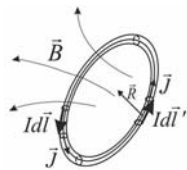
Энергия магнитного поля.

Её объемная плотность.



$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \mu_0 N I; \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 n I. \\ \Phi &= BSN = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} SN = LI; \\ W &= \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} BSN \cdot I = \\ &= \frac{1}{2} BSN \cdot \frac{B2\pi r}{\mu_0 N} = \frac{B^2}{2\mu_0} S2\pi r; \quad w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}; \end{aligned}$$

13.20

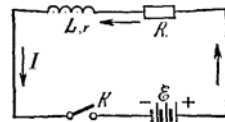


Строгий вывод

$$\begin{aligned} W &= \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} I \int_{S_j} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \\ &= \frac{1}{2} I \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = (Id\vec{l} = \vec{J}dV) = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{J}dV = \\ &= \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{J}dV = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \frac{\text{rot}\vec{B}}{\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0} \oint (\vec{B} \cdot \text{rot}\vec{A} - \text{div}[\vec{A}, \vec{B}])dV; \\ (\nabla \cdot [\vec{A}, \vec{B}]) &= (\vec{B} \cdot [\nabla, \vec{A}]) - (\vec{A} \cdot [\nabla, \vec{B}]); \\ W &= \frac{1}{2\mu_0} \oint \vec{B} \cdot \vec{B} \cdot dV = \oint w dV, \text{ где } w = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}; \end{aligned}$$

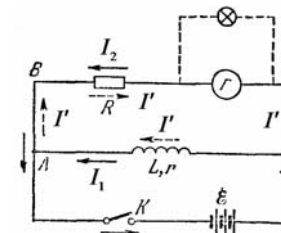
13.21

Явление самоиндукции. Экстратоки замыкания и размыкания. [3, §68]



$$\begin{aligned} IR + Ir &= \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}; \\ L \frac{dI}{dt} &= \mathcal{E} - I(R+r); \Rightarrow L \frac{dI}{-\mathcal{E} + I(R+r)} = -dt; \\ \frac{(R+r)dI}{-\mathcal{E} + I(R+r)} &= -\frac{(R+r)}{L} dt; \Rightarrow \ln(|I(R+r) - \mathcal{E}|) = -\frac{(R+r)}{L} t + C; \\ \text{При } t=0, I=0, \text{ тогда } C &= \ln \mathcal{E}. \quad I(R+r) = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \\ I &= \frac{\mathcal{E}}{R+r} - \underbrace{\frac{\mathcal{E}}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{экстраток замыкания}}. \end{aligned}$$

13.22



После установления тока

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

После размыкания ключа

$$\begin{aligned} I'r + I'R &= -L \frac{dI'}{dt}; \\ \frac{dI'}{I'} &= -\frac{r+R}{L} dt; \end{aligned}$$

$$\ln I' = -\frac{r+R}{L} t + C. \text{ При } t=0 \quad C = \ln I_0, \text{ где } I_0 = I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

$$I' = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}; \Rightarrow U = I'R = \frac{R}{r} \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \text{экстраток}$$

размыкания.

13.23

Лекция 14.

- Магнетики. Понятие о молекулярных токах. Вектор намагниченности вещества и его связь с молекулярными токами. Вектор напряженности магнитного поля. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость вещества. Материальное уравнение для векторов магнитного поля.
- Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля. Магнитная защита. Влияние формы магнетика на его намагниченность.
- Силы, действующие на магнетики в магнитном поле.

14.1

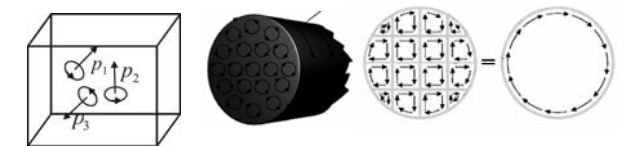
Магнетики. Понятие о молекулярных токах.

- Магнетиками называются вещества, которые при внесении их во внешнее магнитное поле сами становятся источниками магнитного поля. В этом случае говорят, что вещество намагничивается. Полная индукция магнитного поля равна векторной сумме внешнего магнитного поля и поля порожденного магнетиком.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

14.2

Согласно гипотезе Ампера, внешнее магнитное поле индуцирует в магнетике молекулярные токи, которые и порождают дополнительное магнитное поле $\vec{B}'$.



$$\Delta V \begin{cases} \text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}'), & \text{Уравнения магнитостатики} \\ \text{div}\vec{B} = 0. & \text{с учетом молекулярных токов.} \end{cases}$$

Для характеристики намагниченности магнетика вводят понятие вектора намагниченности $\vec{I}$.

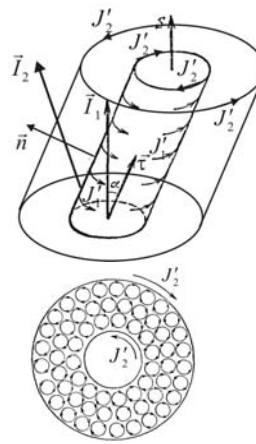
$$\vec{p}_1 = I_1 \vec{S}_1, \vec{p}_2 = I_2 \vec{S}_2, \vec{p}_3 = I_3 \vec{S}_3, \dots \quad \vec{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_i.$$

14.3

Магнитный момент этого цилиндра равен

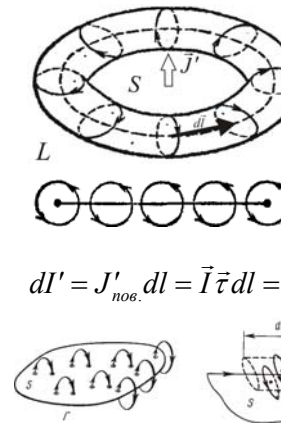
$$\Rightarrow J' = |\vec{I}| \cos \alpha = \vec{I} \cdot \vec{\tau} = I_{\tau}.$$

14.4


$$\vec{J}' = [(\vec{I}_1 - \vec{I}_2), \vec{n}]$$

A diagram showing a 4x4 grid of particles, represented by circles. Above the grid, three upward-pointing arrows are labeled J' . To the left of the grid is a vertical axis labeled y .

14.5


$$\begin{aligned} I' &= \int_{S_L} \vec{J}' d\vec{S} = \oint_L \underbrace{J'_{nos}}_{\vec{I} d\vec{l}} dl = \\ &= \oint_L \vec{I} d\vec{l} = \int_{S_L} \text{rot} \vec{I} \cdot d\vec{S}; \end{aligned}$$

$$dI' = J'_{\text{ноб.}} dl = \vec{I} \vec{\tau} dl = \vec{I} d\vec{l};$$

$$\vec{J}' = \text{rot } \vec{I}.$$

14.6

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\right) = \vec{J}; \Rightarrow \text{rot}\vec{H} = \vec{J}, \text{ где}$$

$$\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) - \text{вектор напряженности магнитного поля.}$$

14.7

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\mu} \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \text{ где } \mu = 1 + \chi -$$

магнитная проницаемость (относительная магнитная проницаемость).

14.8

$$I_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} H_j,$$

Индукция магнитного поля в однородном, изотропном и бесконечном магнетике.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{J}, \\ \text{div} \vec{H} = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = \mu_0 \vec{J}, \\ \text{div} \frac{\vec{B}}{\mu} = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{B}_{\text{вакуум}}$$

Из первого уравнения следует, что $\vec{H}$ в однородном бесконечном магнетике такое же, что и в вакууме.

14.9

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{J}, \\ \text{div} \vec{B} = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{S_L} \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_{S_L} \vec{J} d\vec{S}, \\ \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{J} d\vec{S}, \\ \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{array} \right.$$

интегральная
форма

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), (\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}), \text{—материальные уравнения.}$$

14.10

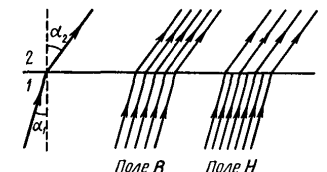
$$B_{n_2}S - B_{n_1}S = 0, \quad H_{\tau_2}l - H_{\tau_1}l = J_k l, \text{ где } \vec{k} \perp h \cdot l.$$

$$B_{n2} = B_{n1}, \quad H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = J_k, \text{ если } J_k = 0, \text{ то}$$

$$\frac{B_{\tau 2}}{\mu_2} = \frac{B_{\tau 1}}{\mu_1}.$$

14.11

$$\mu_2 > \mu_1,$$



$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

14.12

Магнитная защита.

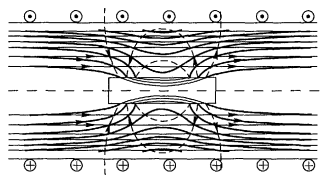
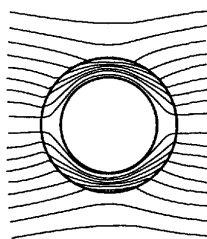


Рис. 165 Сгущение линий индукции внутри магнетика



14.13

Аналогия с электростатикой диэлектриков.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, & \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{I}), \\ \begin{cases} \text{rot} \vec{E} = 0, \\ \text{div} \vec{D} = \rho = 0, \end{cases} & \begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \vec{J} = 0, \\ \text{div} \vec{B} = 0, \end{cases} \\ E_{\tau 1} &= E_{\tau 2}; D_{n1} = D_{n1}, & H_{\tau 1} &= H_{\tau 2}; B_{n1} = B_{n1}, \\ \begin{cases} \text{rot} \vec{E} = 0, \\ \text{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \text{div} \vec{P}, \end{cases} & \begin{cases} \text{rot} \vec{H} = 0, \\ \text{div} \vec{H} = -\text{div} \vec{I}, \end{cases} \\ \vec{E} &\rightarrow \vec{H}; & \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} &\rightarrow \vec{I}. \end{aligned}$$

14.14

Поле однородно намагниченного шара.

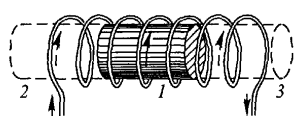
$$\begin{aligned} \sigma' &= P_n & \sigma' &= \varepsilon_0 I_n \\ \vec{P} & & \vec{I} & \\ \vec{E}' &= -\frac{1}{3} \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}; & \vec{H}' &= -\frac{1}{3} \vec{I}; \end{aligned}$$

Если есть внешнее магнитное поле $\vec{H}_0$, то

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_\circ = \vec{H}_0 - \frac{1}{3} \vec{I};$$

$\vec{H}_\circ = \beta \vec{I}$ – размагничивающее поле,
где β – размагничивающий фактор формы. 14.15

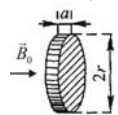
Влияние формы магнетика на его намагниченность.



$\vec{H} = \vec{H}_0 - \vec{H}_\circ$; $\vec{H}_\circ = \beta \vec{I}$ – строго справедливо только для тел эллипсоидальной формы.
 $0 < \beta < 1$;

1) для бесконечного цилиндра $\vec{H} = \vec{H}_0$, $\beta = 0$.

2) Для тонкого магнитного слоя (бесконечного)



Из граничных условий $B_{n0} = B_n$; $H_{n0} = \mu H_n$.
При $r \rightarrow \infty$, $B_n = B$, $H_n = H$. Тогда $H = H_0 / \mu =$
 $= H_0 - (H_0 / \mu) \mu + H_0 / \mu = H_0 - \underbrace{(\mu - 1) H_0}_{\chi} = H_0 - \frac{1}{\beta} I$.
В этом случае $\beta = 1$. 14.16

14.16

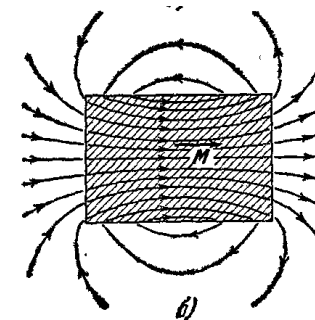
Силы, действующие на магнетики в магнитном поле.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\Delta V} &= \nabla(\underbrace{\vec{P}_{\Delta V}}_{\vec{I}_{\Delta V}} \cdot \vec{B}); \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}_{\Delta V}}{\Delta V} = \nabla(\vec{I} \cdot \vec{B}). \\ \vec{I} &= (\mu - 1) \vec{H} = (\mu - 1) \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}; \\ \vec{f} &= \nabla(\vec{I} \cdot \vec{B}) = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0 \mu} \nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}) = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0 \mu} \frac{1}{2} \nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}); \\ \vec{f} &= \frac{(\mu - 1)}{\mu_0 \mu} \frac{1}{2} \nabla B^2. \end{aligned}$$

Если $\mu > 1$, то магнетик втягивается в область сильного магнитного поля

14.17

Поле постоянного магнита.



14.18

Лекция 15.

- Классификация магнетиков: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия. Парамагнетизм. Теория Ланжевена.
- Микроскопические носители магнетизма. Магнитомеханический опыт Эйнштейна – де Гааза. Механомагнитный опыт Барнетта. Гиромагнитное отношение.

15.1

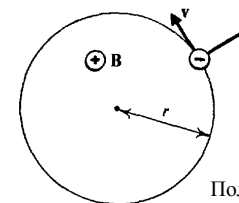
Классификация магнетиков: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

$$\begin{aligned} \mu < 1 \text{ или } \chi < 0 - \text{диамагнетики}, & \left\{ \begin{array}{l} \text{В отсутствии внешнего поля} \\ \text{намагниченность } I = 0. \end{array} \right. \\ \mu > 1 \text{ или } \chi > 0 - \text{парамагнетики}, & \\ \mu \gg 1 \text{ или } \chi \gg 1 - \text{ферромагнетики} & \left\{ \begin{array}{l} \text{В отсутствии внешнего} \\ \text{поля в домене } I \neq 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

В отдельные классы магнетиков относят антиферромагнетики, ферриты и суперпарамагнетики.

15.2

Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия. [1, § 40]



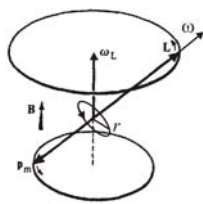
$$\begin{aligned} m \omega_0^2 r &= F_y, & F &= |e| \omega r B, \\ m \omega^2 r &= F_y \pm |e| \omega r B, \\ m \omega^2 r - m \omega_0^2 r &= \pm |e| \omega r B. \end{aligned}$$

Полагая $|\Delta \omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega$ и преобразуя $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\Delta \omega \cdot \omega$, находим

$$\Delta \omega = \pm |e| B / 2m; \Rightarrow \omega_L = |e| B / 2m. \text{ Направление } \vec{\omega}_L \text{ совпадает с } \vec{B},$$

$$\text{то есть } \vec{\omega}_L = -\frac{e \vec{B}}{2m}, \text{ где учтено, что заряд электрона } e < 0.$$

15.3



Для произвольной ориентации орбиты вращения электрона относительно индукции внешнего магнитного поля $\vec{B}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \text{где } \vec{L} = m\vec{r}^2\vec{\omega}, \quad \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

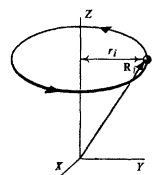
$$\vec{p}_m = I\vec{S} = e \frac{\vec{\omega}}{2\pi} \pi r^2 = \frac{e}{2m} \vec{L}. \quad \text{Получим}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m} [\vec{L}, \vec{B}] = -\frac{e}{2m} [\vec{B}, \vec{L}]. \quad \text{Известно, что для произвольного вектора с } |\vec{A}| = \text{const}, \quad d\vec{A}/dt = [\vec{\Omega}, \vec{A}].$$

$$-\frac{e}{2m} \vec{B} = \vec{\Omega} = \vec{\omega}_L.$$

15.4

Диамагнитная восприимчивость



$$\vec{p}_{m,i} = \vec{S}_i I_i = e r_i^2 \vec{\omega}_L / 2,$$

$$\vec{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i'} \vec{p}_{m,i} = -\frac{e^2}{4m} \vec{B} \cdot Z \frac{N}{\Delta V} \frac{\sum_i r_i^2}{\langle r_i^2 \rangle},$$

где N - число атомов в ΔV , Z - число электронов в атоме.

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \Rightarrow \langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle R_i^2 \rangle,$$

$$\langle r_i^2 \rangle = \langle x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \rangle = 2 \langle R_i^2 \rangle / 3 = 2 \langle R^2 \rangle / 3. \quad \text{Имеем}$$

$$\vec{I} = -\frac{e^2}{6m} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu \tilde{H}} Z n \langle R^2 \rangle = -\frac{e^2}{6m} Z n \langle R^2 \rangle \mu_0 \mu \tilde{H}^{-1}.$$

15.5

$$\chi = -\frac{e^2}{6m} Z n \langle R^2 \rangle < R^2 > \mu_0.$$

Вещество (диамагнетики)	$\chi = (\mu - 1) \cdot 10^{-6}$
вода	-9,0
Медь	-10,3
Стекло	-12,6
Висмут	-176

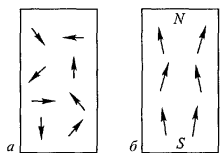
Ларморово вращение атомов не могут создать магнитные силы, оно создается при включении магнитного поля индукционным электрическим полем

$$2\pi r E = -\frac{d\Phi}{dt}; \Rightarrow M = r e E = -\frac{e}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}; \quad m r^2 \frac{d\omega}{dt} = M = -\frac{e}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$m r^2 \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} d\omega = M = -\frac{e}{2\pi} \int_0^{\Phi} d\Phi; \Rightarrow \Delta\omega = \omega_L = -\frac{e}{2m} \frac{\Phi}{\pi r^2} = -\frac{e}{2m} B.$$

15.6

Парамагнетизм. Теория Ланжевена.



$$W = -\vec{p}_m \vec{B}; \Rightarrow dn = A \cdot e^{-\frac{W}{k_B T}} d\Omega,$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ - элемент телесного угла.

$$\langle p_{m,z} \rangle = \int p_{m,z} dn / \int dn.$$

Вспользуемся теорией полярных диэлектриков

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p}_m; \quad \vec{E} \rightarrow \vec{B}; \Rightarrow \langle p_{m,z} \rangle = p_m L(\beta), \quad \text{где}$$

$$\beta = \frac{p_m B}{K_B T}, \quad L(\beta) = \text{cth}\beta - \frac{1}{\beta}. \quad \text{Если } \beta \ll 1, \quad L(\beta) \approx \frac{\beta}{3},$$

$$\langle p_{m,z} \rangle = p_m \frac{p_m B}{3K_B T} = \frac{p_m^2 \mu_0 \mu H}{3K_B T}. \quad \text{Если } \mu \approx 1, \quad \text{то}$$

15.7

$$I_z = n \langle p_{m,z} \rangle = \frac{n \mu_0 p_m^2}{3K_B T} H, \quad \vec{I} = \chi \vec{H}.$$

$$\chi = \mu - 1 = \frac{n \mu_0 p_m^2}{3K_B T} = \frac{C}{T} - \text{закон Кюри.}$$

Температурная зависимость $\chi \sim 1/T$ экспериментально обнаружил П. Кюри в 1896 году, в 1905 году Ланжевэн разработал теорию парамагнетизма и диамагнетизма.

Теория Ланжевэна хорошо описывает лишь газы.

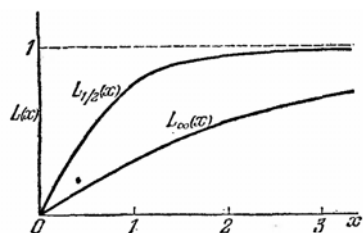
Характерные значения парамагнитной восприимчивости $\chi \sim 10^{-3}$, что приблизительно в 100 раз больше характерного значения $\sim 10^{-5}$ восприимчивости диамагнетиков..

15.8

Magnetic Susceptibilities of Some Paramagnetic and Diamagnetic Substances at 300 K

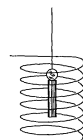
Paramagnetic Substance	χ	Diamagnetic Substance	χ
Aluminum	2.3×10^{-5}	Bismuth	-1.66×10^{-5}
Calcium	1.9×10^{-5}	Copper	-9.8×10^{-6}
Chromium	2.7×10^{-4}	Diamond	-2.2×10^{-5}
Lithium	2.1×10^{-5}	Gold	-3.6×10^{-5}
Magnesium	1.2×10^{-5}	Lead	-1.7×10^{-5}
Niobium	2.6×10^{-4}	Mercury	-2.9×10^{-5}
Oxygen	2.1×10^{-6}	Nitrogen	-5.0×10^{-9}
Platinum	2.9×10^{-4}	Silver	-2.6×10^{-5}
Tungsten	6.8×10^{-5}	Silicon	-4.2×10^{-6}

15.9



15.10

Магнитомеханический опыт Эйнштейна – де-Гааза.



Магнитомеханическое явление - это возникновение вращения тел при их намагничивании. В 1915 году экспериментально обнаружено в опытах Эйнштейна и Гааза.

$$\sum_V \vec{p}_{m,i} = \vec{I} \cdot V, \quad \text{но } \vec{p}_{m,i} = \Gamma \vec{L}_i, \Rightarrow \vec{L} = \sum_V \vec{L}_i = \frac{1}{\Gamma} \vec{I} \cdot V.$$

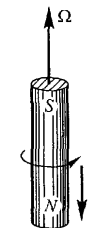
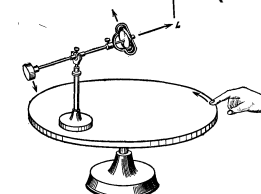
$$L_z = J_z \omega_z = \frac{1}{\Gamma} I_z \cdot V. \quad \text{Так для железного цилиндра}$$

с диаметром 1мм в магнитном поле $H = 10^4 \text{ A/m}$

$$\omega_z = 10^{-3} \text{ рад/с.}$$

15.11

Механомагнитный опыт Барнетта (1914год).



Механомагнитное явление-это намагничивание магнетика при его вращение.

В опытах Барнетта при вращении железного цилиндра 6000 об/мин наблюдалось намагничивание эквивалентное наличию внешнего поля 10^{-2} A/m .

15.12

Микроскопические носители магнетизма. Гиромангнитное отношение.

Исследование магнитомеханического и механомангнитного явлений показало $\Gamma < 0$, следовательно, магнетизм обусловлен движением электронов. Для

магнетиков $-\frac{e}{m} < \Gamma < -\frac{e}{2m}$. Для ферромагнетиков (железо, никель, кобальт

и др.) $\Gamma = -\frac{e}{m}$, что указывает на то, что магнетизм магнетиков нельзя

объяснить только орбитальным движением электронов.

Совокупность имеющихся данных указывает на то, что электрон обладает собственным механическим (спином) и магнитным моментом $\vec{p}_{m,s} = -\frac{e}{m}\vec{S}$. Спин

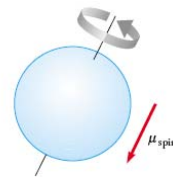
квантуется, его проекция $S_z = \pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Квантуется

и проекция собственного магнитного момента $p_{m,s} = \pm \mu_B = \pm \frac{eh}{4\pi m}$ — магнетон

Бора $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А·м².

15.13

Классическая модель спина электрона.



15.14

Энергия магнитного поля (тока) в бесконечной изотропной магнитной среде.

В магнитной среде $\vec{B} = \mu \vec{B}_0$. Следовательно,

$$\Phi = \mu \Phi_0 = \frac{\mu L_0}{L} I = LI; \Rightarrow W = \frac{LI^2}{2} = \mu \frac{L_0 I^2}{2} =$$

$$= \mu \frac{1}{2} \int_{\infty} B_0^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\infty} \frac{\mu \vec{B}_0 \cdot \mu \vec{B}_0}{\mu_0 \mu} dV = \int_{\infty} \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} dV.$$

$$w = \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{\vec{H} \mu_0 (\vec{H} + \vec{I})}{2} =$$

$$= \frac{\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{B}_0}{2\mu_0} + \frac{\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{I}}{2}, \text{ где } \frac{\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{I}}{2} - \left\{ \begin{array}{l} \text{плотность энергии намаг-} \\ \text{ничивания магнетика.} \end{array} \right.$$

15.15

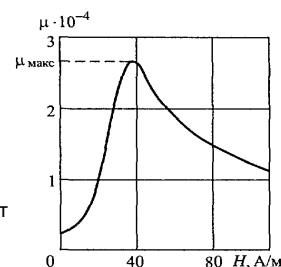
Лекция 16.

- Ферромагнетики. Спонтанная намагниченность и температура Кюри. Доменная структура. Гистерезис намагничивания, кривая Столетова. Остаточная индукция и коэрцитивная сила. Температурная зависимость намагниченности.

16.1

Ферромагнетики.

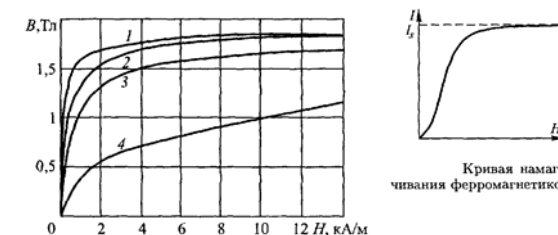
- Ферромагнетики — это сильномагнитные магнетики, относительная магнитная проницаемость которых может достигать десятков тысяч единиц. Кроме этого, ферромагнетики обладают рядом других отличительных особенностей по сравнению с диа- и парамагнетиками.



Магнитная проницаемость зависит от напряженности магнитного поля. На рисунке приведена такая зависимость для чистого железа (кривая Столетова).

16.2

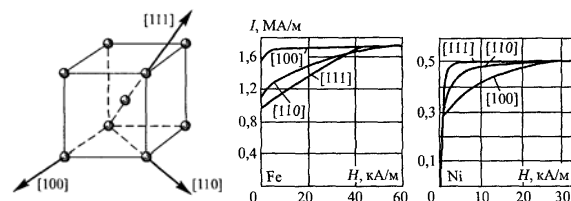
Кривая намагничивания



Зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля: 1 — электролитическое железо, 2 — малоуглеродистое железо, 3 — литая сталь, 4 — чугун

16.3

Анизотропия намагничивания.

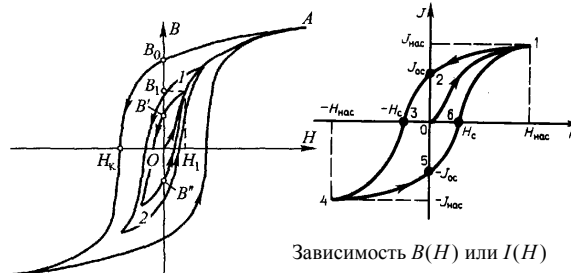


Элементарная кристаллическая ячейка железа и ее основные кристаллографические направления: [100] — легкого, [111] — трудного намагничивания

Кривые намагничивания Fe и Ni по различным направлениям монокристаллических образцов.

16.4

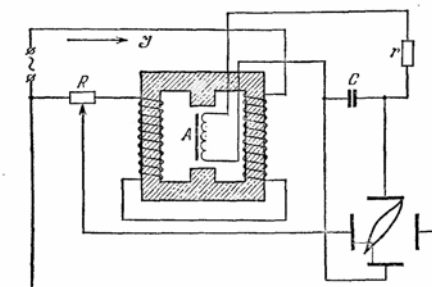
Гистерезис намагничивания. Остаточная индукция и коэрцитивная сила.



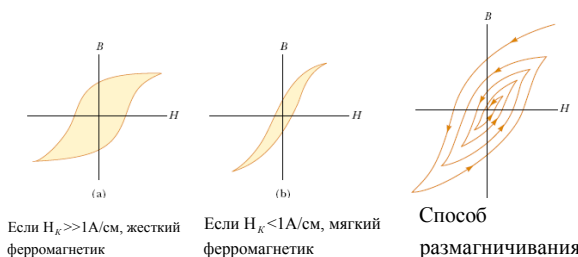
Зависимость $B(H)$ или $I(H)$ неоднозначна и определяется предисторией намагничивания.

16.5

Схема установки для наблюдения петли гистерезиса.

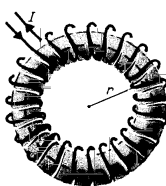


16.6



16.7

Работа при намагничивании ферромагнетика.



Пусть торойд заполнен ферромагнетиком. При увеличении тока в обмотке на dI возникает ЭДС самоиндукции, против которой ток совершает работу $dA = -Idt \mathcal{E}^{\text{св}} = Id\Phi$, где $\Phi = BNS$, N - число витков. По теореме о циркуляции вектор $\vec{H}$ имеем $H2\pi r = NI$. Находим

$$dW = dA = \frac{H2\pi r}{N} NSdB = HdB \frac{2\pi rS}{V}.$$

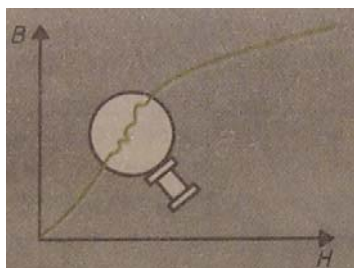
Таким образом, работа dW , необходимая для увеличения индукции на $d\vec{B}$ в единице объема, равна $dW = \vec{H}d\vec{B} = \mu_0 \vec{H}d(\vec{H} + \vec{I}) = \mu_0 \vec{H}d\vec{H} + \underbrace{\mu_0 \vec{H}d\vec{I}}_{\text{плотность энергии намагничивания}}.$

16.8



16.9

Эффект Баркгаузена (1919).



16.10

Спонтанная намагниченность и температура Кюри.

Исследования показали, что даже в отсутствии внешнего магнитного поля ферромагнетик разбит на микроскопические области (домены), в которых ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения. Спонтанная намагниченность ферромагнетика обусловлена ориентацией собственных магнитных моментов электронов ($\Gamma = -e/m$).

Ферромагнитное упорядочение существует только при температурах меньшей некоторого критического значения T_K . При $T > T_K$, ферромагнитное упорядочение пропадает и ферромагнетик превращается в парамагнетик. Зависимость магнитной проницаемости от температуры для таких парамагнетиков подчиняется закону Кюри-Вейса

$$\chi = \frac{C}{T - T_K}.$$

16.11

Температура Кюри некоторых ферромагнетиков

Вещество	$T_K, ^\circ\text{C}$	Вещество	$T_K, ^\circ\text{C}$
Кобальт	1150	Никель	360
Железо	770	30 %-ный пермаллой	70
78 %-ный пермаллой (сплав 22 % Fe, 78 % Ni)	550	Гадолиний	17

16.12

Механизм ориентации спинов ферромагнетика объясняет квантовая теория взаимодействия заряженных частиц (электронов) со спином $\hbar/2$ находящихся на незаполненных d-оболочках атомов ферромагнетика

$$W = -A \cdot \vec{S}_1 \vec{S}_2,$$

где A - обменная константа (интеграл). Если $A > 0$, то спинам энергетически выгодно ориентироваться параллельно (ферромагнитное упорядочение). Если $A < 0$, то выгодно антипараллельная ориентация (антиферромагнитное упорядочение).

Таким образом, ферромагнитное упорядочение обусловлено сильным обменным взаимодействием электронов атомов с нескомпенсированными спинами и имеет немагнитное происхождения. (Дорфман 1927)

16.13

Первая теория ферромагнетизма была разработана Вейсом в 1907 году по аналогии с теорией парамагнетизма Ланжевена, в которой дополнительно к микроскопическому полю добавлено гипотетическое "молекулярное поле"

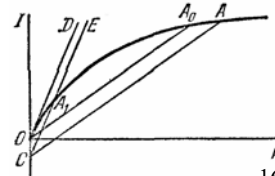
$$\vec{B}_{\text{эфф}} = \mu_0(\vec{H} + b\vec{I}),$$

где b - постоянная Вейса. Тогда для формулы Ланжевена получим

$$I = I_s L(\beta), \text{ где } I_s = np_m, \beta = \frac{p_m B_{\text{эфф}}}{K_B T}; \Rightarrow I = \frac{K_B T n}{I_s b \mu_0} \beta - \frac{H}{b}.$$

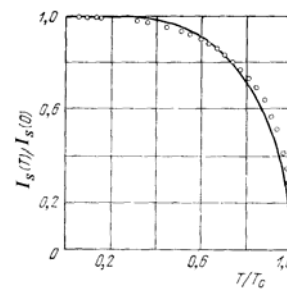
$$I = I_s L(\beta),$$

$$I = \frac{K_B T n}{I_s b \mu_0} \beta - \frac{H}{b}.$$



16.14

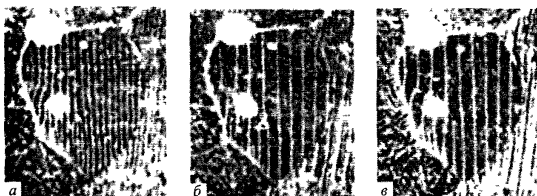
Наклон кривой OD определяет критическую температуру ферромагнитного упорядочения (фазовый переход 2-го рода). Намагниченность насыщения ферромагнетика зависит от температуры



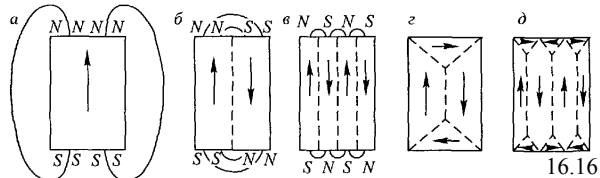
Намагниченность насыщения никеля как функция температуры. Сплошная кривая - теоретическая, построенная на $L_{1/2}(x)$.

16.15

Ферромагнитные домены в кремнистой стали.

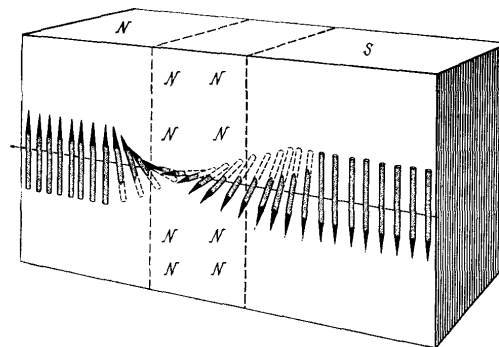


Механизм возникновения доменов



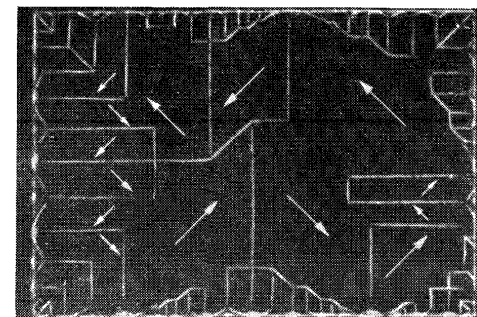
16.16

Доменная граница(стенка) Блоха

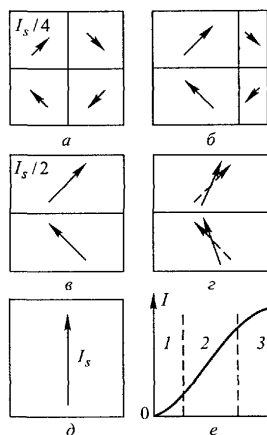


16.17

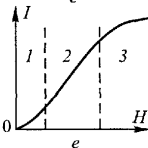
Доменная структура на поверхности монокристаллической никелевой пластины



16.18

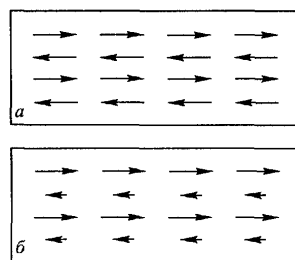


Различные типы процессов намагничивания ферромагнетика:
а - е) смещение границ, г) намагничивание вращения, д) намагничивание насыщения; участок 1 - обратное смещение ДГ, 2 - исчезновение невыгодных доменов, 3 - вращение намагниченности внутри домена.



16.19

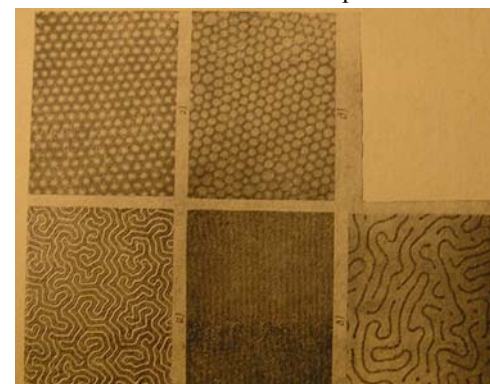
Антиферромагнетики. Ферриты. Суперпарамагнетики.



Ферриты - обладают большим удельным сопротивлением, то есть являются магнитными полупроводниками. Находят важное применение в радиотехнике СВЧ. Ферриты-гранаты являются магнитными диэлектриками. Прозрачны для света.

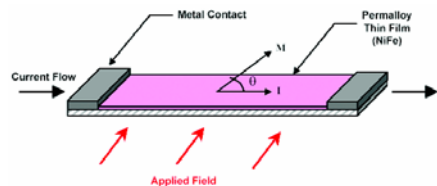
16.20

Доменная структура тонких магнитодисковых пластин ЖИГ с сильной анизотропией



16.21

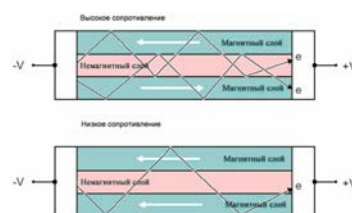
Анизотропный магниторезистивный эффект



$$\Delta R = \frac{\Delta \rho}{\rho} R \cos^2 \theta$$

16.22

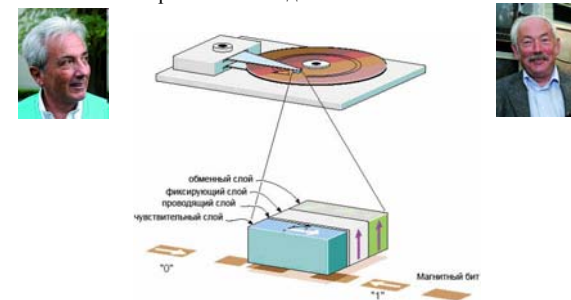
Гигантский магниторезистивный (ГМР) эффект. Спинтроника.



16.23

ГМР датчик.

Альберт Ферт (Albert Fert) и Петер Грюнберг (Peter Grunberg)
Нобелевская премия 2007 год.



16.24

Лекция 17.

- Квазистационарные поля. Критерий квазистационарности. Переходные процессы в RC- и RL-цепях.
- Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.
- Энергия гармонических колебаний. Затухающие колебания в контуре и их уравнение. Показатель затухания. Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.
- Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.

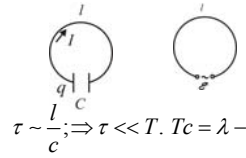
17.1

Квазистационарные поля.

Критерий квазистационарности.

В квазистационарном приближении полагается, что в рассматриваемой электродинамической системе все распределенные в пространстве заряды, токи и поля изменяются синхронно и мгновенно. То есть в каждый момент времени нестационарные заряды и токи порождают электрическое и магнитное поле соответствующее эквивалентным стационарным зарядам и токам.

Критерий квазистационарности.



излучаемой волны. $\Rightarrow l \ll \lambda$.

Если $l = 1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$, то $\tau = \frac{10^3 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = \frac{1}{3} 10^{-5} \text{ с}$. $\nu = \frac{1}{T} \ll 10^5 \text{ Гц} = 100 \text{ кГц}$.

Если $l = 100 \text{ м}$, то $\tau = \frac{10^2 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = \frac{1}{3} 10^{-6} \text{ с}$. $\nu = \frac{1}{T} \ll 10^6 \text{ Гц} = 1 \text{ МГц}$.

Микропроцессор $l = 1 \text{ см}$. $\Rightarrow \nu_0 = 1/\tau = c/l \sim 10 \text{ ГГц}$. Близок к пределу квазистационарности

17.2

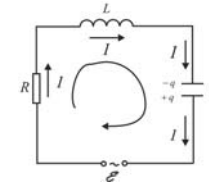
Уравнение колебательного контура в квазистационарном приближении.

Пусть q – заряд первой пластины конденсатора, встречающейся при положительном обходе контура.

Тогда напряжение $U_c = q/c$ и ток в контуре

$I = dq/dt$ будут иметь правильный знак.

Согласно правилу Кирхгофа, имеем



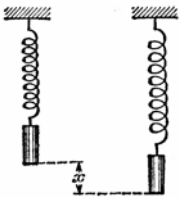
$$IR + U_c = \mathcal{E}_{\text{самонд.}} + \mathcal{E},$$

q/c $-LdI/dt$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E}.$$

17.3

Механическая аналогия

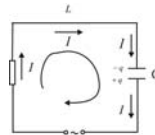


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu v_x + F,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = F.$$

17.4

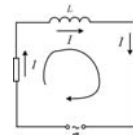
Переходные процессы в RC- и RL-цепях.



$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathcal{E} \Rightarrow R \frac{dq}{dt} = c\mathcal{E} - q \Rightarrow \frac{dq}{c\mathcal{E} - q} = \frac{dt}{Rc}.$$

$$\ln|c\mathcal{E} - q| = -\frac{t}{Rc} + \text{const.} \text{ При } t=0 \text{ const} = \ln|c\mathcal{E}|,$$

$$c\mathcal{E} - q = c\mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{Rc}} \Rightarrow q = c\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{Rc}}).$$



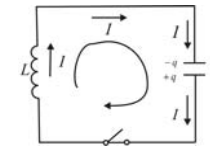
$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L};$$

$$c \rightarrow \frac{1}{R}; \quad R \rightarrow L; \quad q \rightarrow I.$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}).$$

17.5

Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Собственные колебания в контуре. Уравнение гармонических колебаний.



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{\omega_0^2} q = 0.$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$q = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0), I = \dot{q} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $a = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\text{tg} \varphi_0 = -\frac{A}{B}$. Начальные условия: при $t=0$, q_0, I_0 .

В частности, если при $t=0$, $q=q_0, I=I_0=0$, то $A=0, B=q_0 \Rightarrow$

$$q = q_0 \cos \omega_0 t, \quad I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t. \quad W_c = \frac{q^2}{2c}, \quad W_l = W_c = \frac{LI^2}{2}.$$

17.6

Энергия гармонических колебаний.

$$I \cdot \left(L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{c} \right) = 0 \Rightarrow L \frac{d}{dt} \left(\frac{I^2}{2} + \frac{dq}{dt} \frac{q}{c} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2c} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2c} = \text{const.}$$

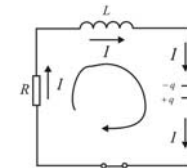
$$W_l = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2} a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{a^2}{2c} \frac{1}{2} (1 - \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)])$$

$$W_c = \frac{q^2}{2c} = \frac{a^2}{2c} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{a^2}{2c} \frac{1}{2} (1 + \cos[2(\omega_0 t + \varphi_0)])$$

$$\langle W_{L,c} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T W_{L,c} dt = \frac{a^2}{4c} \Rightarrow \langle W_l \rangle = \langle W_c \rangle.$$

17.8

Затухающие колебания в контуре и их уравнение.



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} q = 0.$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad q = \xi e^{-\gamma t}.$$

$$(q = uv, \dot{q} = \dot{u}v + u\dot{v}, \ddot{q} = \ddot{u}v + 2\dot{u}\dot{v} + u\ddot{v})$$

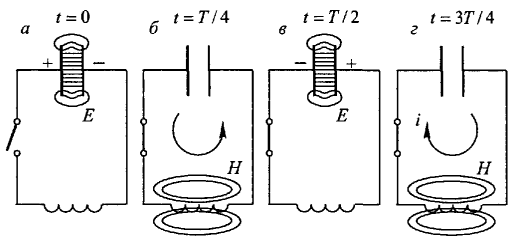
$$\ddot{\xi} e^{-\gamma t} - 2\dot{\xi} \gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 \xi e^{-\gamma t} + 2\gamma \xi \dot{e}^{-\gamma t} - 2\gamma^2 \xi e^{-\gamma t} + \omega_0^2 \xi e^{-\gamma t} = 0,$$

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \gamma^2)\xi = 0, \text{ если } \gamma < \omega_0, \text{ то } \ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi = 0, \text{ где } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

$$\xi = a_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \Rightarrow q = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0).$$

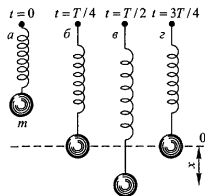
Если при $t=0$, $q=q_0, I=\dot{q}=0$, то $\varphi_0=0, a_0=q_0$.

17.9



$$q = q_0 \cos \omega_0 t,$$

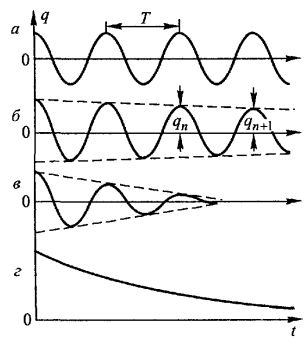
$$I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t.$$



$$x = x_0 \cos \omega_0 t,$$

$$v_x = \dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t.$$

17.7



$$q = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t).$$

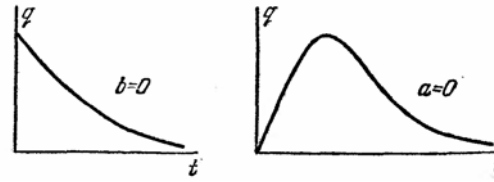
Если $\gamma > \omega_0$, то $\ddot{\xi} - (\gamma^2 - \omega_0^2)\xi = 0$.

$$\xi = Ae^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + Be^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t}, q = Ae^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

17.10

Если $\gamma = \omega_0$, то $\ddot{\xi} = 0$, $\xi = (a + b \cdot t)$,

$$q = (a + b \cdot t)e^{-\gamma t}.$$



17.11

Показатель затухания (декремент затухания).

Время релаксации. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура.

$a = a(t) = a_0 e^{-\gamma t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$\gamma = \frac{R}{2L}$ – декремент (показатель) затухания;

$\tau = \frac{1}{\gamma}$ – время релаксации, время за которое

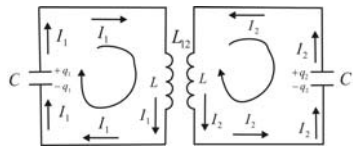
амплитуда колебаний уменьшится в $e = 2,7$ раз.

$\theta = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \gamma T$ – логарифмический декремент затухания.

$Q = \frac{\pi}{\theta}$ – добротность колебательного контура.

17.12

Колебания в связанных контурах. Парциальные колебания и их частоты. Нормальные колебания (моды) и их частоты.



$$\begin{cases} q_1 = -L \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \\ q_2 = -L \frac{dI_2}{dt} - L_{12} \frac{dI_1}{dt}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_1}{C} = 0, \\ L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{I_2}{C} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L + L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{C} (I_1 + I_2) = 0, \\ (L - L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \frac{1}{C} (I_1 - I_2) = 0, \end{cases}$$

17.13

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{(L + L_{12})C} (I_1 + I_2) = 0, & I_1 + I_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1^0), \\ \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \frac{1}{(L - L_{12})C} (I_1 - I_2) = 0, & I_1 - I_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2^0). \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1^0) + \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2^0),$$

$$I_2 = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1^0) - \frac{a_2}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2^0),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L + L_{12})C}} \text{ и } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L - L_{12})C}} - \text{нормальные частоты.}$$

17.14

Парциальная частота – это частоты колебаний системы с N степенями свободы при фиксированных $N - 1$ степенях.

В рассмотренном случае обе парциальные частоты совпадают и равны

$$\omega_{m1} = \omega_{m2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для нормальных и парциальных частот справедливо неравенство

$$\omega_1 < \omega_{m1} \leq \omega_{m2} < \omega_2.$$

17.15

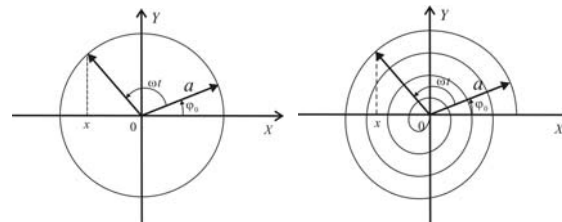
Лекция 18.

- Вынужденные колебания в контуре. Процесс установления вынужденных колебаний. Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления. Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока. Метод векторных диаграмм и метод комплексных амплитуд.

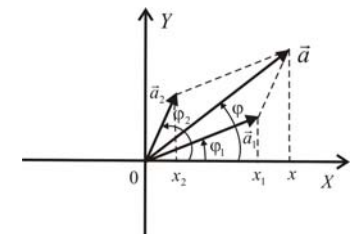
18.1

Метод векторных диаграмм.

$$x = a \cos(\omega t + \phi_0). \quad x = \underbrace{a_0 e^{-\gamma t}}_a \cos(\omega t + \phi_0).$$



18.2



$$x_1 = a_1 \cos(\phi_1), \quad \text{где } \phi_1 = \omega_1 t + \phi_{1,0};$$

$$x_2 = a_2 \cos(\phi_2), \quad \text{где } \phi_2 = \omega_2 t + \phi_{2,0};$$

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\phi).$$

18.3

метод комплексных амплитуд.

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \Rightarrow z = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi.$$

Имеем

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[a e^{i(\omega t + \varphi_0)}].$$

$$z = a e^{i(\omega t + \varphi_0)} = a \cos(\omega t + \varphi_0) + i a \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$z = a e^{i(\omega t + \varphi_0)} = z = a e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = z_0 e^{i\omega t},$$

где $z_0 = a e^{i\varphi_0}$ - комплексная амплитуда. 18.4

Комплексная частота.

Пусть $\omega = \omega' + i\omega''$, тогда

$$z = z_0 e^{i\omega t} = z_0 e^{i(\omega' + i\omega'')t} = z_0 e^{-\omega'' t} \cdot e^{i\omega' t},$$

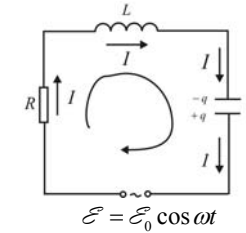
где $z_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$ - комплексная амплитуда.

Если $\operatorname{Im} \omega = \omega'' = \gamma$ - декремент затухания,

$$\text{то } x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}[a_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega' t + \varphi_0)}] =$$

$a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi_0)$ - затухающие колебания. 18.5

Вынужденные колебания в контуре.



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t.$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t,$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \cos \omega t.$$

$$q = q_{\text{общ. одн.}} + q_{\text{частн. неодн.}}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0; \Rightarrow q_{\text{общ. одн.}} = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\underbrace{\omega_0^2 - \gamma^2}_{\omega_1^2} \cdot t + \varphi_0).$$

18.6

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения вынужденных колебаний воспользуемся комплексным представлением гармонической функции.

$$\ddot{q}_k + 2\gamma \dot{q}_k + \omega_0^2 q_k = x_0 e^{i\omega t},$$

$$q_k = z_0 e^{i\omega t}; \Rightarrow (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) z_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t};$$

$$z_0 = z_0(\omega) = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}; \Rightarrow q_k = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}.$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}; \Rightarrow q_k = \frac{x_0}{\rho} e^{i(\omega t - \varphi)}; q = \operatorname{Re} q_k = \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi).$$

18.7

Общее решение равно

$$q = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi).$$

Структуру этого решения легко понять

с помощью метода векторных диаграмм.

В частности, если при $t = 0$ величины $q = 0$, $\dot{q} = 0$, то



18.6

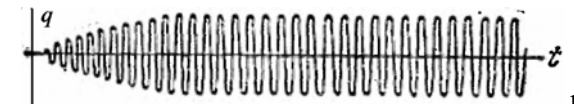
Процесс установления вынужденных колебаний при резонансе.

Пусть при $t = 0$, $q = 0$, $\dot{q} = I = 0$, тогда

$$\begin{cases} a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\rho} \cos \varphi = 0, \\ -a_0 \omega_1 \sin \varphi_0 - \gamma a_0 \cos \varphi_0 + \frac{x_0}{\rho} \omega \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Если $\gamma \ll \omega_0$ и $\omega = \omega_0$, то $\varphi_0 = -\varphi$, $a_0 = -x_0 / \rho$.

$$q \cong \frac{x_0}{\rho} (1 - e^{-\gamma t}) \cos(\omega t - \varphi); \quad t \gg \tau = 1 / \gamma.$$



18.9

Переменный синусоидальный ток. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления.

При $t \gg \tau$, $q = \frac{x_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi)$, $\Rightarrow$

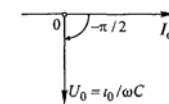
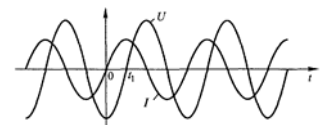
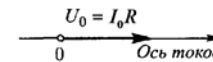
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega x_0}{\rho} \sin(\omega t - (\varphi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) = I_0 \cos(\omega t - \varphi);$$

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{x_0}{C\rho} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2});$$

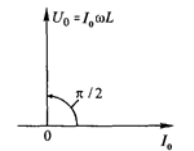
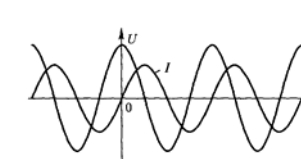
$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \omega \sin(\omega t - \varphi) = \omega LI_0 \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2});$$

18.10

$$U_R = IR = \underbrace{I_0 R}_{U_{R,0}} \cos(\omega t - \varphi);$$



18.11



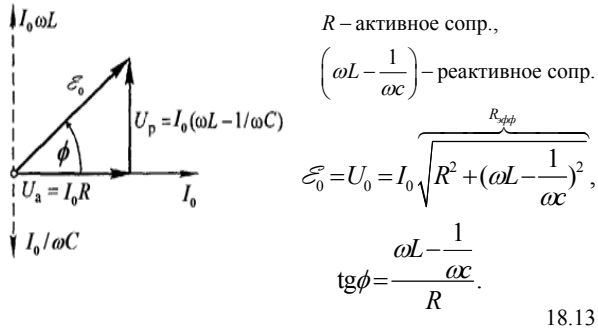
R - активное сопротивление,

$R_c = \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление,

$R_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление.

18.12

Векторная диаграмма напряжений для последовательного соединения сопротивления, емкости и индуктивности.



Импеданс. Закон Ома для цепей переменного тока.

$$q_k = \frac{x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t} \Rightarrow I_k = \frac{dq_k}{dt} = \frac{i\omega \cdot x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t};$$

$$I_k = \frac{i\omega \cdot (\mathcal{E}_0 / L)}{\frac{1}{Lc} - \omega^2 + i2\frac{R}{2L}\omega} e^{i\omega t} = \frac{i\omega \cdot (\mathcal{E}_0 / L)}{\frac{1}{Lc} - \omega^2 + i2\frac{R}{2L}\omega} e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{\frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R}} = \frac{\mathcal{E}_k}{Z}, \text{ где } Z = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R -$$

- комплексное сопротивление или импеданс.

$$I_k = \frac{\mathcal{E}_k}{Z} = \frac{\mathcal{E}_k}{|Z|} e^{i\phi}, \text{ где } Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \text{ tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

18.14

Так как $|I_k| = I_0$, $|\mathcal{E}_k| = \mathcal{E}_0$, $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

$$|I_k| = \frac{|\mathcal{E}_k|}{|Z|} \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \text{ tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

закон Ома для переменного тока

R – активное сопротивление,
 $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ – реактивное сопротивление.

18.15

Лекция 19.

- Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе. Ширина резонансной кривой.
- Резонанс токов. Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.
- Работа и мощность переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения.

19.1

Резонанс напряжений. Напряжения и токи при резонансе.

Исследуем зависимость амплитуды $U_{c,0}$ и фазы ϕ от частоты ω вынуждающей ЭДС (напряжения) в последовательном RLC контуре.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

$$U_c = \frac{q}{c} = \frac{x_0}{c\rho} \cos(\omega t - \phi), \text{ где } \rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}, \text{ tg} \phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$U_{c,0} = \frac{x_0}{c\rho} = \frac{\mathcal{E}_0}{Lc\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

При $\omega \rightarrow 0$, $U_{c,0} \rightarrow \mathcal{E}_0$ – статическое напряжение.

При $\omega \rightarrow \infty$, $U_{c,0} \rightarrow 0$.

19.2

$$\frac{dU_{c,0}}{d\omega} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\rho^3} \left(-\frac{1}{2}\right) [-2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 4\gamma^2 2\omega] = 0;$$

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2; \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

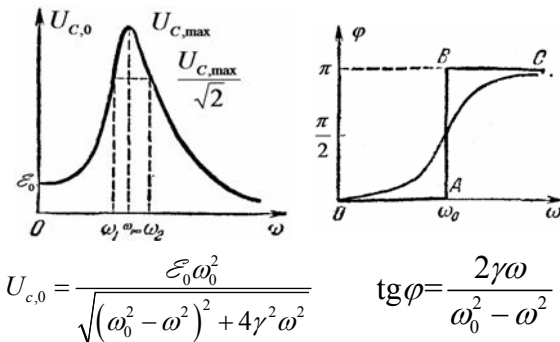
$$U_{c,\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2 \omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

В частности, если $\gamma \ll \omega_0$, то

$$U_{c,\text{max}} = \mathcal{E}_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} = \mathcal{E}_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \frac{U_{c,\text{max}}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{2\gamma} =$$

$$= \frac{\pi}{T\gamma} = \frac{\pi}{\theta} = Q - \text{добротность контура.}$$

19.3



$$U_{L,0} = \omega L I_0 = \omega^2 \frac{Lc}{1/\omega_0^2} \frac{1}{\omega C} I_0 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} U_{c,0}.$$

При резонансе $\omega = \omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, если $\gamma \ll \omega_0$,

тогда $U_{L,0} = U_{c,0} = \mathcal{E}_0 Q$.

Фаза отличается на π .

19.5

Ширина резонансной кривой.

$$\frac{U_{c,\text{max}}}{\sqrt{2}} = U_{c,0}(\omega); \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}};$$

$$8\gamma^2 (\omega_0^2 - \gamma^2) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2;$$

$$4\gamma^2 \omega_0^2 - 4\gamma^4 = \underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}_{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \underbrace{4\gamma^2 \omega^2}_{4\gamma^2 (\omega^2 - \omega_0^2)} + 4\gamma^4 =$$

$$= (\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2;$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = \pm 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = \underbrace{\omega_0^2 - 2\gamma^2}_{\omega_{\text{рез}}^2} - 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \quad \omega_2^2 = \underbrace{\omega_0^2 - 2\gamma^2}_{\omega_{\text{рез}}^2} + 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2};$$

19.6

Если $\gamma \ll \omega_0$, то $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\gamma\omega_0$; $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\omega_0$; $\Rightarrow$
 $\omega_1 = \omega_0 - \gamma$; $\omega_2 = \omega_0 + \gamma$; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$.
 $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\theta} = Q$ — добротность контура.

Точные оценки дают

$$\omega_{рез} - \omega_1 > \omega_2 - \omega_{рез}$$

(в отличие от рисунка 301 в [3])

19.7

Токи при резонансе.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\omega x_0}{\rho} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\omega x_0}{\rho} \cos(\omega t - (\varphi - \frac{\pi}{2})).$$

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{Lc} - \omega^2}{\frac{2}{L} \frac{R}{\omega}} = -\frac{\frac{1}{\omega c} - \omega L}{\frac{2R}{\omega}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{2R}.$$

19.8

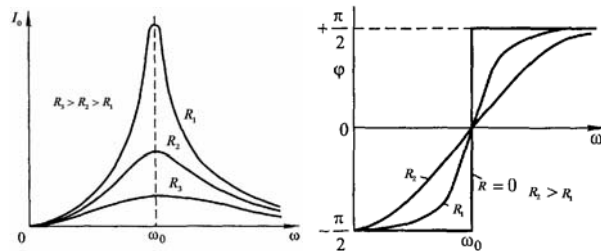
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega x_0}{\rho} \cos(\omega t - \phi); I_0 = \frac{\omega x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} =$$

$$= \frac{\omega \mathcal{E}_0}{L \sqrt{\left(\frac{1}{Lc} - \omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega c} - L\omega\right)^2 + R^2}}.$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}} \cos(\omega t - \phi); \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

$$\omega_{рез} = \omega_0$$

19.9



Резонансные кривые

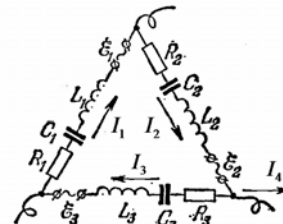
(АЧХ)

Изменение сдвига фазы
колебаний тока при
изменении частоты ЭДС

(ФЧХ)

19.10

Правила Кирхгофа для цепей переменного тока.



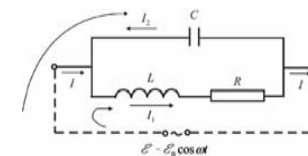
$$I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

$$\sum_n I_n = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} I_{1K} Z_1 &= \mathcal{E}_{1K}, \text{ где } Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} + i\omega L_1, \\ I_{2K} Z_2 &= \mathcal{E}_{2K}, \text{ где } Z_2 = R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} + i\omega L_2, \\ I_{3K} Z_3 &= \mathcal{E}_{3K}, \text{ где } Z_3 = R_3 + \frac{1}{i\omega C_3} + i\omega L_3, \end{aligned} \right\} \sum_n I_{nK} Z_n = \mathcal{E}_{nK}$$

19.11

Резонанс токов.



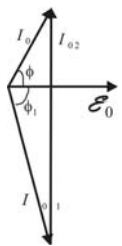
$$\begin{cases} I_1(i\omega L + R) = \mathcal{E}, \\ -I_2 \frac{1}{i\omega c} = \mathcal{E}, \\ I_1 = I + I_2, \end{cases}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + i\omega L} + \mathcal{E} \cdot i\omega c = \frac{\mathcal{E}(R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} + \mathcal{E} \cdot i\omega c =$$

$$= \left[\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \right] \mathcal{E},$$

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \cdot \mathcal{E}_0; \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega c - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}};$$

19.12



Векторная диаграмма токов

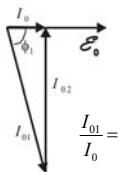
$$I_{01} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \operatorname{tg} \phi_1 = -\frac{\omega L}{R};$$

Если $\omega L \gg R$, то $\phi_1 \approx \pi/2$.

$$I_0 \approx \sqrt{\left(\frac{R}{\omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\omega c - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \cdot \mathcal{E}_0 = \frac{R}{\omega^2 L^2} \mathcal{E}_0; \Rightarrow$$

$$I_0 = \min, \text{ если } \omega = \omega_0 = \frac{1}{Lc}.$$

$$\operatorname{tg} \phi \approx \frac{\omega^2 L^2}{R} \left(\omega c - \frac{1}{\omega L} \right) = 0, \text{ если } \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{Lc};$$

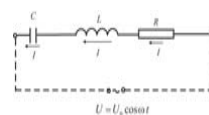


$$\frac{I_{01}}{I_0} = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{R}}{\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0^2 L^2}} = \frac{\omega_0 L}{R} \cdot 2 = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{T_0 \gamma} = Q; I_{02} = \mathcal{E}_0 \omega_0 c = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L} = I_{01};$$

19.13

Работа и мощность переменного тока.

Эффективные значения тока и напряжения



$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + i\omega L - i \frac{1}{\omega c}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\phi}} = \frac{U_0 e^{i\omega t - i\phi}}{|Z|},$$

$$\text{где } |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c} \right)^2}; \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

$$I = \frac{U_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi) = I_0 \cos(\omega t - \phi); \Rightarrow P = UI = U_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= [2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)] = \frac{I_0 U_0}{2} [\cos(\omega t - \phi) + \cos(\phi)].$$

$$<P> = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \phi = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \phi = \frac{I_0^2 R}{2} = I_e^2 R,$$

см. векторную диаграмму

19.14

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} - \text{эффективное значение тока,}$$

$$U_e = \frac{U_0}{\sqrt{2}} - \text{называется эффективным значением напряжения.}$$

$\cos \phi$ — коэффициент мощности.

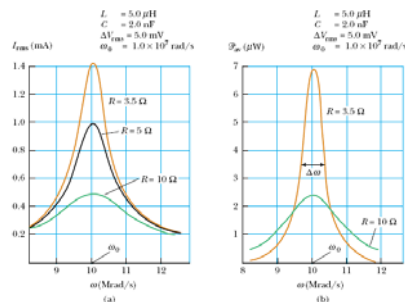
$$\phi = \arg(R + i(\omega L - \frac{1}{\omega c})); \Rightarrow \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2}}.$$

Если $(\omega L - \frac{1}{\omega c})^2 \gg R^2$, то $\cos \phi \ll 1$.

19.15

Зависимость средней мощности переменного тока поглощаемой в контуре от частоты имеет резонансный вид.

$$\langle P \rangle = I_0^2 R / 2$$

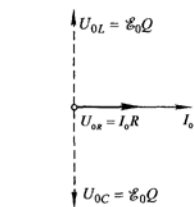


Active Figure 33.19 (a) The rms current versus frequency for a series RLC circuit, for three values of R . The current reaches its maximum value at the resonance frequency ω_0 . (b) Average power delivered to the circuit versus frequency for the series RLC circuit, for two values of R .

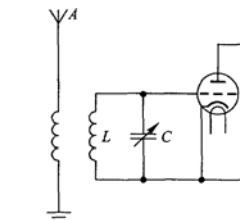
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

19.16

Применение резонанса напряжений в радиотехнике.



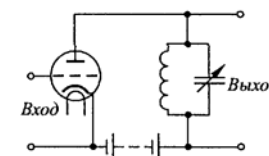
Векторная диаграмма напряжений при резонансе



Входной контур радиоприемника (схематически)

19.17

Применение резонанса токов.



Резонансный усилитель

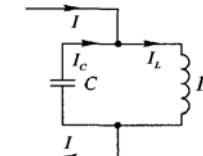


Схема нагревающего контура индукционной цепи

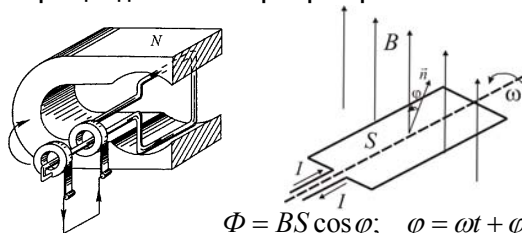
19.18

Лекция 20.

- Техническое использование переменных токов. Генераторы и электродвигатели. Трехфазный ток. Получение и использование вращающегося магнитного поля. Соединение обмоток генератора и нагрузки «звездой» и «треугольником». Фазное и линейное напряжения.
- Трансформатор. Принцип действия, устройство, применение. Коэффициент трансформации. Роль сердечника.

20.1

Генераторы и электродвигатели.
Принцип действия генератора переменного тока.

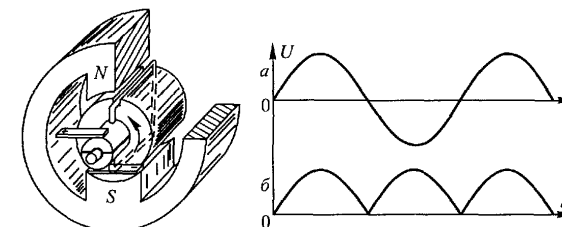


$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} BS \cos(\omega t + \phi_0) = \frac{BS\omega \sin(\omega t + \phi_0)}{\mathcal{E}_0} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi_0).$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t + \phi_0) = I_0 \sin(\omega t + \phi_0).$$

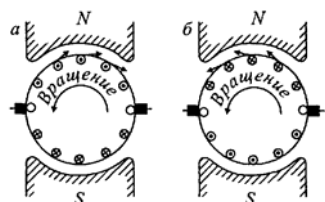
20.2

Принцип действия генератора постоянного (пульсирующего) тока.



20.3

Электродвигатель постоянного тока.



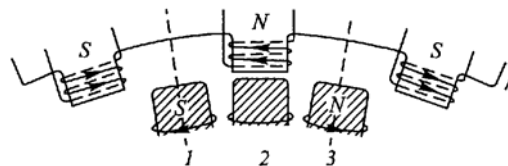
Электродинамические силы, действующие на якорь генератора (a) и двигателя (b) постоянного тока

$$I_{\text{я}} = \frac{(U - \mathcal{E}_{\text{инд}})}{r_{\text{я}}}.$$

Для пуска мощных электродвигателей используется реостат, так как при неподвижном якоре ток $I_{\text{я}} = U / r_{\text{я}}$ большой.

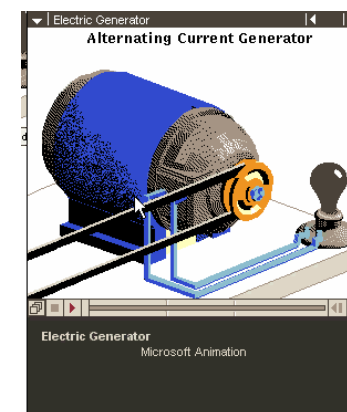
20.4

Синхронные двигатели.

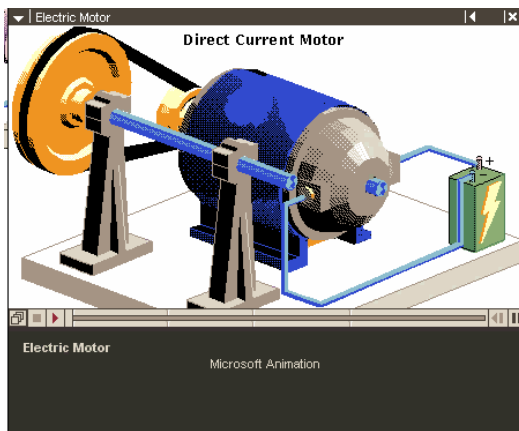


Принцип синхронного двигателя переменного тока

20.5



20.6



20.7

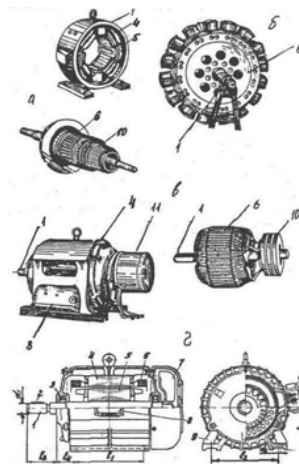
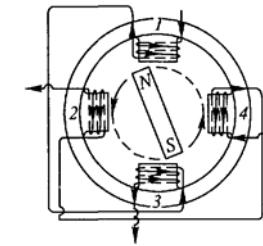


Рис. 2. Электрические двигатели: а - постоянного тока; б - синхронные; в - асинхронные с фазным ротором; г - асинхронные трехфазные с коротко замкнутым ротором серии 4А. 1 - вал, 2 - шпонка, 3 - подшипник, 4 - статор, 5 - обмотка статора, 6 - ротор (якорь); 7 - вентилятор; 8 - коробка выводов; 9 - лапа, 10 - коллектор; 11 - щетки; l1, l2 - продольное и поперечное расстояния в лапах; l3 - длина выступающего конца вала; l4 - размер выступающей крышки; h - высота оси вращения; d1, d2 - диаметры вала и отверстий в лапах.

20.8

Двухфазный ток.



$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t),$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Получение двухфазного тока

20.9

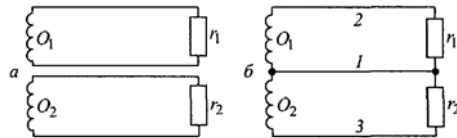


Схема двухфазной системы токов

Напряжения между концами обмоток O_1 и O_2 называют *фазными напряжениями*, токи в O_1 и O_2 — *фазными токами*. Эти же названиями обозначают напряжения и токи в нагрузочных сопротивлениях r_1 и r_2 . Напряжения же между проводами линии 1, 2 и 3 называют *линейными напряжениями*, а токи в этих проводах — *линейными токами*.

Если принять потенциал общего провода 1 за нуль, то

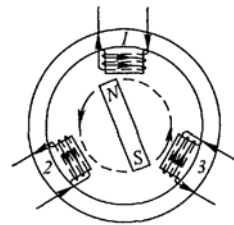
$$U_{12} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t), \quad U_{13} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 90^\circ), \quad U_{23} = U_{12} - U_{13} =$$

$$= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 90^\circ) = 2\mathcal{E}_0 \sin 45^\circ \cos(\omega t - 45^\circ) =$$

$$= \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + 45^\circ).$$

20.10

Трехфазный ток.

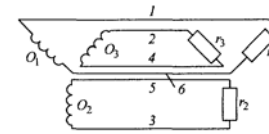


Получение трехфазного тока

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t),$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 120^\circ),$$

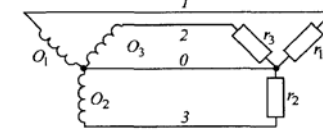
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 240^\circ).$$



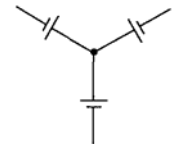
Трехфазная система токов

20.11

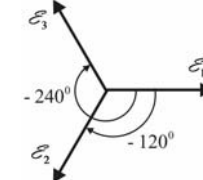
Соединение обмоток генератора и нагрузки «звездой» и «треугольником». Фазное и линейное напряжения.



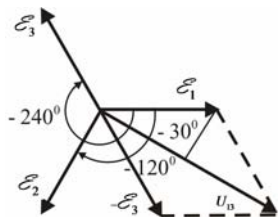
Соединение звездой



Соединение трех источников тока звездой



20.12



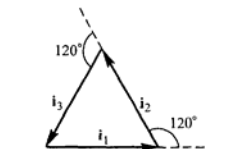
$$U_{13} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 240^\circ) =$$

$$= 2\mathcal{E}_0 \cos(30^\circ) \sin(\omega t - 30^\circ) = \sqrt{3}\mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 30^\circ).$$

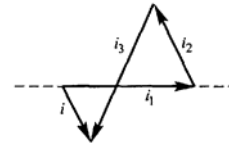
Аналогично получим

$$U_{12} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 120^\circ) = \sqrt{3}\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + 30^\circ).$$

20.13

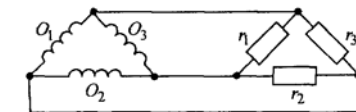


Векторная диаграмма токов в нулевом проводе. Симметричная нагрузка



Векторная диаграмма токов в нулевом проводе. Несимметричная нагрузка

20.14



Соединение треугольником

20.15

Получение и использование вращающегося магнитного поля.

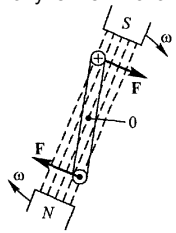
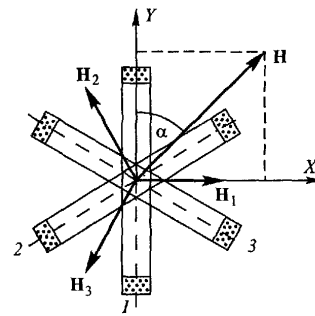
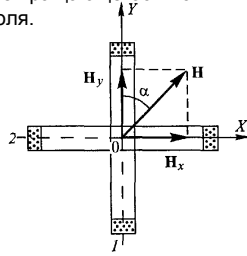


Рис 222. Действие вращающегося магнитного поля на замкнутый виток проволоки

$$H_x = H_0 \sin \omega t; H_y = H_0 \sin(\omega t - 90^\circ) = -H_0 \cos \omega t.$$

20.16

Рис 223. Возникновение вращающегося магнитного поля двухфазного тока

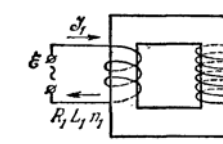


$$H_1 = H_0 \sin \omega t, \\ H_2 = H_0 \sin(\omega t - 120^\circ), \\ H_3 = H_0 \sin(\omega t - 240^\circ).$$

Рис 224. Возникновение вращающегося магнитного поля трехфазного тока

20.17

Трансформатор. Принцип действия, устройство, применение. Коэффициент трансформации. Роль сердечника.



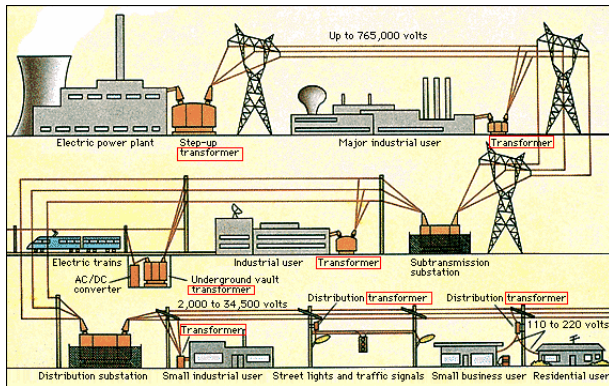
$$R_1 I_1 = U_1 - \frac{d\Phi_1}{dt}, \\ R_2 I_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Обычно $I_1 R_1 \ll U_1 \Rightarrow U_1 = i\omega\Phi_1, U_2 = -i\omega\Phi_2, \Phi_1 = n_1\Phi_0, \Phi_2 = n_2\Phi_0,$

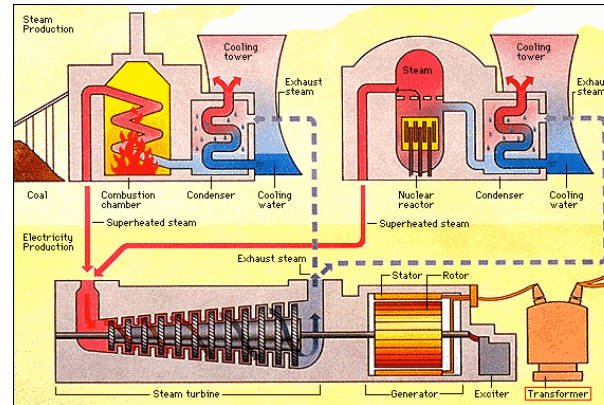
$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{n_2}{n_1} = K - \text{коэффициент трансформации.}$$

$$P_1 = P_2; \Rightarrow I_1 U_1 = I_2 U_2; \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

20.18



20.19



20.20

Лекция 21.

- Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя.
- Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения. Взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Вектор Умова-Пойтинга. Скорость распространения электромагнитных волн.

21.1

Система уравнений Максвелла как обобщение опытных данных. Ток проводимости и ток смещения.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \\ \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{I}), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0, \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \end{cases}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

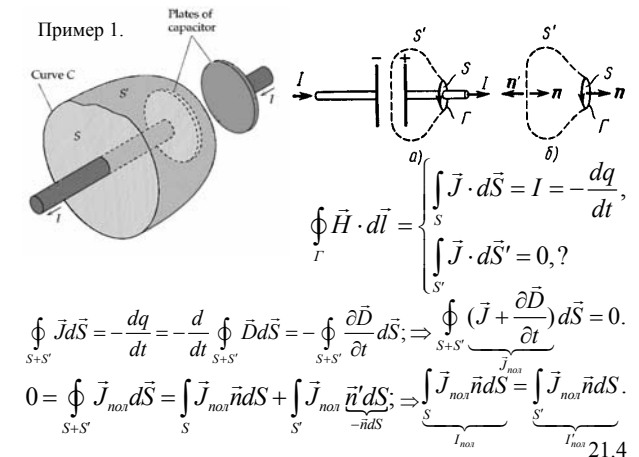
21.2

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{S_V} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \\ \int_{S_V} \vec{B} d\vec{S} = 0, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}. \end{cases}$$

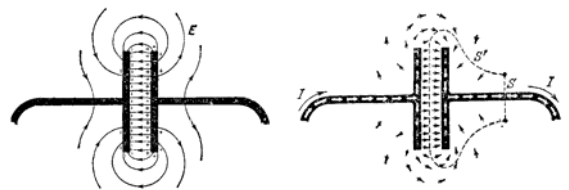
$$\vec{J}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{плотность тока смещения.}$$

$$I_{cm} = \int_S \vec{J}_{cm} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} - \text{ток смещения.}$$

21.3

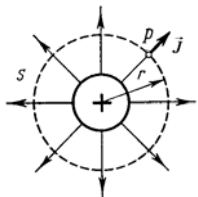


21.4



Электрическое поле в определенный момент времени. Величина поля E всюду увеличивается со временем.

Пример 2.



$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0; \quad D 4\pi r^2 = q; \Rightarrow$$

$$J = -\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial t} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{I}{4\pi r^2};$$

21.5

Высокочастотные токи. Скин-эффект. Толщина скин-слоя

Второе условие квазистационарности: $|\vec{J}| \gg \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|$.

Пусть $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$. Тогда, учитывая $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{J} = \vec{E} / \rho$, имеем $E_0 / \rho \gg \omega \epsilon \epsilon_0 E_0$. Или $\omega \ll 1 / (\epsilon \epsilon_0 \rho)$. Для меди

$$1 / (\epsilon_0 \rho) = 1 / (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м} \cdot 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}) = 6,6 \cdot 10^{18} \text{ рад / с}$$

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{J}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{grad}(\text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}) = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \text{rot}(\mu \mu_0 \vec{H})}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}; \\ \Delta \vec{E} = \frac{\mu \mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

21.6



Скин-эффект в бесконечном проводнике с плоской границей

$$\frac{\partial^2 E_x(y, t)}{\partial y^2} = \frac{\mu \mu_0}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Полагая $E_x(y, t) = E_0(y) e^{i\omega t}$, имеем

$$\frac{\partial^2 E_0(y)}{\partial y^2} = \frac{\mu \mu_0}{\rho} i \omega E_0(y).$$

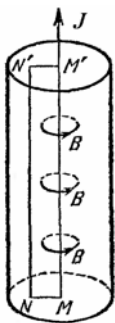
$$E_0(y) = A e^{-ky} + B e^{ky}, \quad k^2 E_0(y) = i \frac{\mu \mu_0 \omega}{\rho} E_0(y), \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{\mu \mu_0 \omega}{2\rho}.$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \sqrt{i} = \sqrt{2} \frac{1+i}{\delta \sqrt{2}}. \quad \text{Из граничных условий: } |E_0(y)| < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty, \Rightarrow B = 0.$$

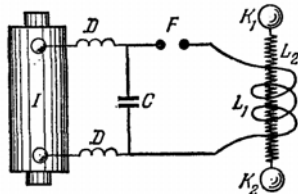
$$E_x(y, t) = A e^{-\frac{x}{\delta}(1+i)} e^{i\omega t} = A e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}. \quad \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu \mu_0 \omega}} - \text{толщина скин-слоя.}$$

21.7

Например, если $\omega = 10^4 \text{ рад/с}^{-1}$, $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (медь), $\mu = 1$, $\mu_0 = 1,27 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$, $\delta = 1,65 \text{ мм}$.



Высокочастотный резонансный трансформатор Тесла



21.8

Взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны. Волновое уравнение.

Рассмотрим электромагнитное поле в однородной изотропной и бесконечной среде или в вакууме при $\rho = 0$ и $J = 0$.

$$\begin{cases} \text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \\ \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{grad}(\text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = -\mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}, \\ \text{grad}(\text{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{D} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{где } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \\ \Delta \vec{H} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \end{cases}$$

21.9

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \Rightarrow \vec{E}(t - \frac{z}{v}), \\ \Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \Rightarrow \vec{H}(t - \frac{z}{v}), \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[\omega(t - \frac{z}{v})] = \vec{E}_0 \cos[\omega t - \frac{\omega}{v} z] = \vec{E}_0 \cos[\omega t - kz],$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[\omega t - \vec{k} \vec{r}] = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}. \quad (\frac{\omega}{k} = v \text{ по определению } k)$$

$$\text{Аналогично } \vec{H}_0 \cos[\omega t - \vec{k} \vec{r}] = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} = i\omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \text{rot} \vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = -i[\vec{k}, \vec{E}],$$

$$\text{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}. \quad 21.10$$

Вектор Умова-Пойтинга.

$$w = \vec{E} \vec{D} / 2 + \vec{H} \vec{B} / 2$$

Учитывая равенства $\vec{D} = [\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}]$, $\vec{B} = [\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}]$, имеем

$$w = -\vec{E} [\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}] / 2 + \vec{H} [\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}] / 2 = \vec{H} [\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}] = \frac{\vec{k}}{\omega} [\vec{E}, \vec{H}].$$

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] - \text{вектор Умова-Пойтинга, } \vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H},$$

$$|\vec{S}| = \frac{\omega}{k} w = v w = | \text{ для вакуума } | = c w.$$

21.12

Вектор Умова-Пойтинга (строгий вывод).

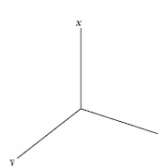
$$P = \int \vec{J} \vec{E} dV = \int (\text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \vec{E} dV = |\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{H} - \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{E}| =$$

$$= \int (\text{rot} \vec{E} \cdot \vec{H} - \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}) dV = - \int \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] dV +$$

$$+ \int (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}) dV = \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} =$$

$$- \int \underbrace{[\vec{E}, \vec{H}]}_{\vec{S}} d\vec{\sigma} - \frac{\partial}{\partial t} \int \underbrace{(\frac{\vec{H} \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \vec{D}}{2})}_{w} dV;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int w dV = -P - \int \underbrace{[\vec{E}, \vec{H}]}_{\vec{S}} d\vec{\sigma}; \Rightarrow \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] - \text{поток энергии электромагнитного поля.} \quad 21.13$$



$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [-i\vec{k}, \vec{E}] = -i\omega \vec{B} = -i\omega \mu \mu_0 \vec{H}, \\ [-i\vec{k}, \vec{H}] = i\omega \vec{D} = i\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \end{cases}$$

$$\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$$

$$\frac{k}{\omega} E_x = \mu \mu_0 H_y, \quad \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0},$$

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_x = \sqrt{\mu \mu_0} H_y,$$

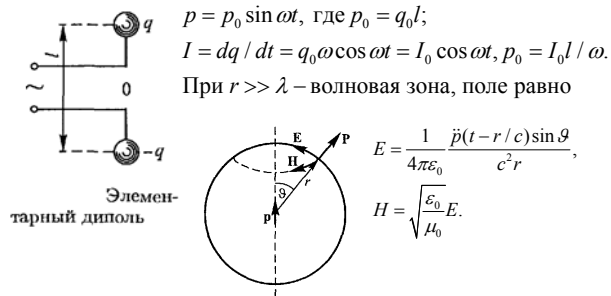
$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu \mu_0} H_0,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{\omega} = Tv$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu}$$

21.11

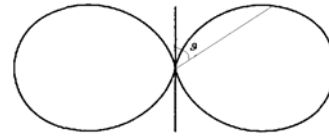
Излучение электромагнитных волн элементарным диполем.



21.14

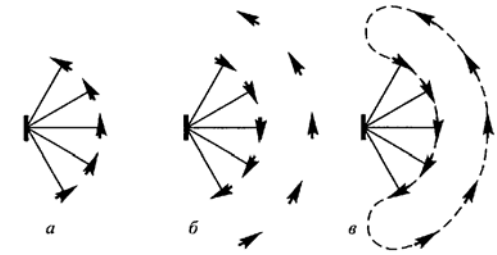
Для гармонических колебаний $\ddot{p}(t-r/c) = -p_0 \omega^2 \sin[\omega(t-r/c)]$.

$$S = EH = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2[\omega(t-r/c)]; \Rightarrow \langle S \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{1}{2}.$$



$$dW_{\text{изл.}} = \int_{S_r} S d\sigma = \int_{S_r} S 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{12\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3}.$$

21.15



Форма линий напряженности поля излучающего диполя

21.16

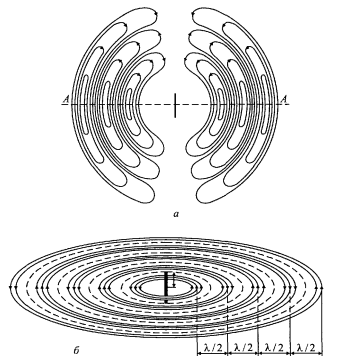
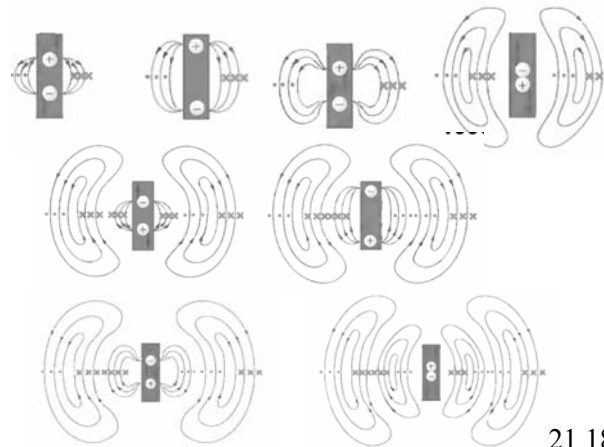


Рис. 425. Линии напряженности (а) и индукции (б) в шаровой электромагнитной волне диполя

21.17



21.18

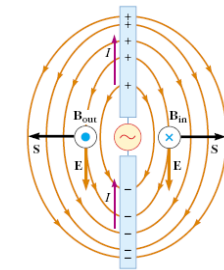
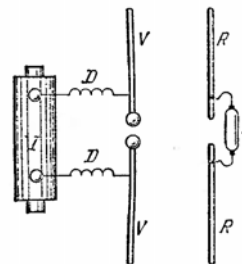


Figure 34.10 A half-wave antenna consists of two metal rods connected to an alternating voltage source. This diagram shows $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ at an arbitrary instant when the current is upward. Note that the electric field lines resemble those of a dipole (shown in Fig. 23.22).

21.19

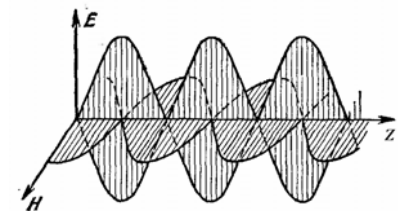
Электромагнитные волны обнаружены
Генрихом Герцем в 1888 году с
помощью вибратора Герца.



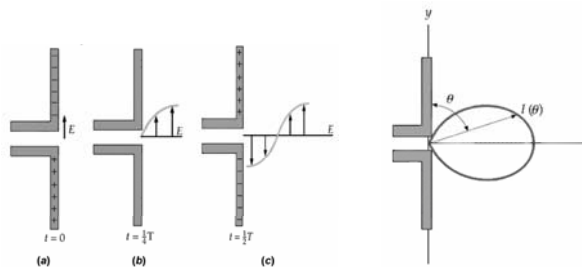
21.21

Поле стоячей электромагнитной волны.

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t - kz), & H_y &= H_0 \cos(\omega t - kz), \\ E_x &= E_0 \cos(\omega t + kz), & H_y &= -H_0 \cos(\omega t + kz), \\ E_x &= 2E_0 \cos kz \cos \omega t, & H_y &= 2H_0 \sin kz \sin \omega t. \end{aligned}$$



21.22



21.20

Лекция 22.

- Основные положения классической электронной теории проводимости Друде – Лоренца. Опыты Толмена и Стюарта. Законы Ома, Джоуля – Ленца и Видемана – Франца в классической теории.
- Понятие о зонной теории твердых тел. Энергетические уровни и формирование энергетических зон. Принцип Паули. Статистика Ферми-Дирака. Особенности зонной структуры диэлектриков, полупроводников и металлов. Объяснение проводимости твердых тел с помощью зонной теории.

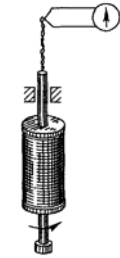


Схема опыта Толмена и Стюарта

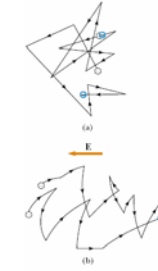
$$F_{\text{и}} = -m \frac{dv}{dt}; \quad E_{\text{стоп.}} = \frac{F_{\text{и}}}{e} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt},$$

$$\mathcal{E} = \int_L E_{\text{стоп.}} dl = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} L, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} \frac{L}{R},$$

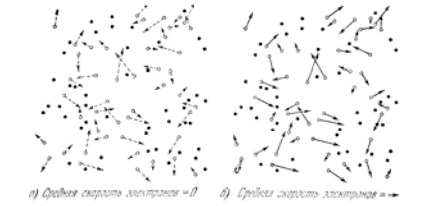
$$q = \int_{t_0}^0 I dt = \frac{m}{e} \frac{L}{R} v_0.$$

22.2

Основные положения классической электронной теории проводимости Друде – Лоренца.



(a) A schematic diagram of the random motion of two charge carriers in a conductor in the absence of an electric field. The drift velocity is zero. (b) The motion of the charge carriers in a conductor in the presence of an electric field. Note that the random motion is modified by the field, and the charge carriers have a drift velocity.



а) Классическое распределение примерно равного числа электронов (светлые кружки) и положительных ионов (темные кружки). Скорости электронов показаны векторами и в б) сориентированы случайно. В б) существует дрейфовый ток, представляющий вектор скорости. Эта скорость, добавленная к каждой первоначальной скорости электронов, как показано для одного из электронов в левом нижнем углу.

$$\vec{J} = en \langle \vec{v} \rangle, \quad \text{где} \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(2\vec{v}_{i0} + \frac{e\vec{E}}{m} t_i \right),$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \vec{v}_{i0} = 0, \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{e\vec{E}}{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{e\vec{E}}{2m} \tau.$$

22.3

Законы Ома и Джоуля – Ленца.

$$\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n_j t_j - \text{среднее время между соударениями.}$$

Здесь n_j – число частиц из n , имеющих время между столкновениями t_j .

$$\vec{J} = en \frac{e\vec{E}}{2m} \tau = \frac{ne^2 \tau}{2m} \vec{E} = \lambda \vec{E} - \text{закон Ома.}$$

Пусть n_e – число частиц в ед. объема, имеющие время между столкновениями t_i .

Энергия приобретаемая этими частицами за время t_i равна

$$\sum_{i=1}^{n_i} \left(\frac{m(\vec{v}_{i0} + \Delta \vec{v}_i)^2}{2} - \frac{mv_{i0}^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^{n_i} \left(\frac{m}{2} (\vec{v}_{i0}^2 + 2\vec{v}_{i0} \cdot \frac{\Delta \vec{v}_i}{eE_i/m} + \vec{v}_i^2) - \frac{mv_{i0}^2}{2} \right) = n_i \frac{m}{2} \frac{e^2 E^2 t_i^2}{m^2}$$

Эта энергия в результате столкновения с ионами переходит в тепло. За ед. времени число столкновений с ионами таких частиц равно $1/t_i$. Следовательно, энергия приобретенная n_i частицами за 1с равна

$$\frac{n_i}{t_i} \frac{mv_i^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{e^2 E^2 n_i t_i}{m^2} = \frac{e^2 E^2}{2m} n_i t_i.$$

22.4

Энергия приобретаемая от электрического поля всеми электронами в единице объема за 1с и переходящая в тепло в результате столкновений с ионами будет равна

$$Q = \sum_i \frac{e^2 E^2}{2m} n_i t_i = \frac{ne^2 E^2}{2m} \frac{1}{n} \sum_i n_i t_i = \frac{ne^2 E^2}{2m} \tau = \lambda E^2 -$$

закон Джоуля-Ленца.

22.5

Закон Видемана – Франца в классической теории.

В 1853 году Видеман и Франц установили, что для металлов $\chi/\lambda = aT$, где постоянная a не зависит от рода металла. То есть металлы, имеющие большую электропроводность, имеют и большую теплопроводность. Классическая электронная теория Друде-Лоренца объясняет этот феноменологический закон.

$$\vec{J}_Q = \chi \nabla T,$$

где $\chi = nc_v v_T < l > / 3$, где $< l > = v_T \tau$, $c_v = 3k_B / 2 -$ теплоемкость, приходящая на один электрон.

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{nc_v v_T^2 \tau / 3}{ne^2 \tau / 2m} = \frac{2}{3} \frac{mv_T^2}{e^2} c_v = \left| v_T^2 = \frac{3k_B T}{m} \right| = 3 \frac{k_B^2}{e^2} T = aT.$$

22.6

Трудности классической электронной теории.

$$1) \rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{ne^2 \tau} = \frac{2m}{ne^2} \frac{v_T}{< l >} = \frac{2m}{ne^2} \frac{\sqrt{3k_B T / m}}{\sqrt{2n\sigma}} \sim \sqrt{T},$$

а не $\sim T$ ($\rho = \rho_0(1 + \alpha T)$).

$$2) U = i \frac{k_B T}{2} N, \quad C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = i \frac{k_B}{2} N, \text{ где } i = n_{\text{ион}} + n_{\text{вр}} + 2n_{\text{кол}}.$$

$$C_v = C_{\text{ионов}} + C_{\text{электронов}} = 2 \cdot 3 \frac{k_B}{2} N + 3 \frac{k_B}{2} N = 4,5 \frac{k_B}{2} N.$$

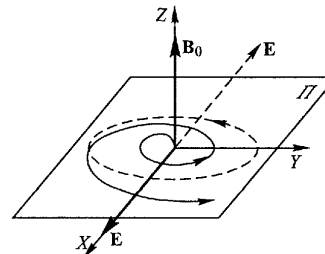
Экспериментальное значение: $C_v = 3k_B N$.

3) Экспериментальные значения для средняя длина свободного пробега $< l >$ составляет десятки периодов кристаллической решетки.

22.7

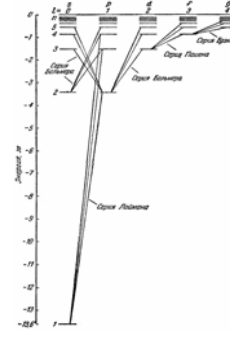
4) Значение эффективной массы электрона проводимости в металле, полученное на основании данных циклотронного резонанса оказалось меньше массы свободного электрона.

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m^*} B, \text{ где } m^* < m_e$$



22.8

Поведение электронов в металлах подчиняется законам квантовой или волновой механики. Движение электронов подобно волновому движению материи и описывается волновой функцией, определяемой квантовомеханическим уравнением Шредингера. Рассмотрим основные особенности квантовомеханических систем.



Энергетический спектр атома водорода.

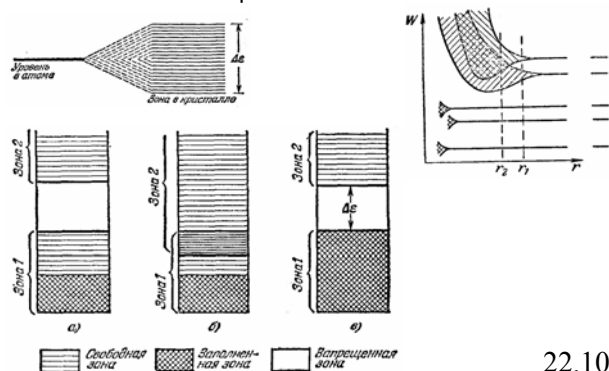
$$W_n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad P_n = \int \Psi_n^2 dV.$$

$$\Psi_n(x, y, z, t) = \Psi_{n,l,m,s}.$$

Энергетический спектр молекул.

22.9

Понятие о зонной теории твердых тел. Энергетические уровни и формирование энергетических зон.



22.10

Принцип Паули. Статистика Ферми-Дирака.

Число частиц в ед. объема, имеющих импульс в интервале

$$p_x, p_x + dp_x; p_y, p_y + dp_y; p_z, p_z + dp_z,$$

равно $dn = f(W)dp_x dp_y dp_z$, где

$f(W) = Ae^{-\frac{W}{k_B T}}$ – плотность распределения частиц по импульсам. В квантовой статистике число микросостояний конечно

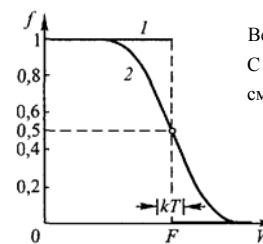
$$dZ = 2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3} \Rightarrow dn = f(W)dZ,$$

где для ферми частиц

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp[(W - F)/k_B T]} - \text{распределение Ферми-Дирака}$$

Если $(W - F)/k_B T \gg 1$, то $f(W) = e^{-\frac{F}{k_B T}} e^{-\frac{W}{k_B T}}$

22.11



Величина F называется энергия Ферми. С точки зрения термодинамики имеет смысл химического потенциала

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S, V}$$

В металлах $F = (1-6)\varepsilon_B$.

При комнатной температуре $k_B T = 0,03\varepsilon_B$.

Для меди $\frac{k_B T}{F} = 0,004$.

Функция Ферми-Дирака 1 – $T = 0$, 2 – $T \neq 0$

Число электронов участвующих в тепловом движении мало,

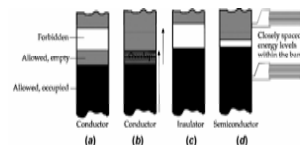
поэтому $C_v = 3k_B N$.

$$\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{ne^2} \frac{v_T}{\langle l \rangle}; v_T = v_F, \text{ где } F = mv_F^2/2,$$

$$\frac{1}{\langle l \rangle} = \frac{1}{l_{ph}} + \frac{1}{l_{np}}; \frac{1}{l_{ph}} \sim T, l_{np} = const; \Rightarrow \rho = \rho_0 + \alpha T.$$

22.12

Особенности зонной структуры диэлектриков, полупроводников и металлов. Объяснение проводимости твердых тел с помощью зонной теории.



22.13

Происхождение эффективной массы электронов.

$$W = U + \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = W(\vec{p}).$$

В металле вблизи дна зоны проводимости

(p отсчитывается от p_c)

$$W = W(\vec{p}) = W(\vec{0}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 W}{\partial p_x^2} p_x^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 W}{\partial p_y^2} p_y^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 W}{\partial p_z^2} p_z^2 + \dots$$

22.14

Объяснение закона Видемана-Франца в рамках квантовых представлений.

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{2}{3} \frac{mv_T^2}{e^2} c_V, \text{ где } \frac{mv_T^2}{2} = F, c_V = \frac{12}{5} k_B \frac{k_B T}{F}$$

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{4}{3} \frac{mv_T^2}{e^2} c_V = \frac{4}{3} \frac{F}{e^2} \frac{12}{5} k_B \frac{k_B T}{F} = \frac{16}{5} \frac{k_B^2}{e^2} T.$$

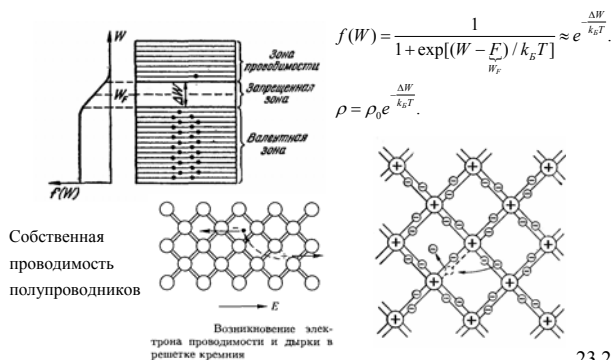
22.15

Лекция 23.

- Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Полупроводники р- и n-типа. р – n-переход. Применение полупроводников: полупроводниковые диоды, транзисторы, фотодиоды, фоторезисторы.
- Контактные явления. Контактная разность потенциалов. Термоэлектричество. Термодвижущая сила. Термопары. Эффект Пельтье. Явление Томсона.
- Сверхпроводимость. Основные свойства сверхпроводников. Магнитная индукция внутри сверхпроводника. Эффект Мейснера. Критическое поле. Высокотемпературная сверхпроводимость. Применение сверхпроводников.

23.1

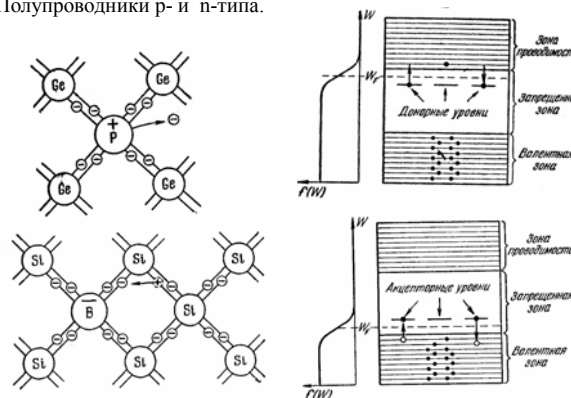
Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников.



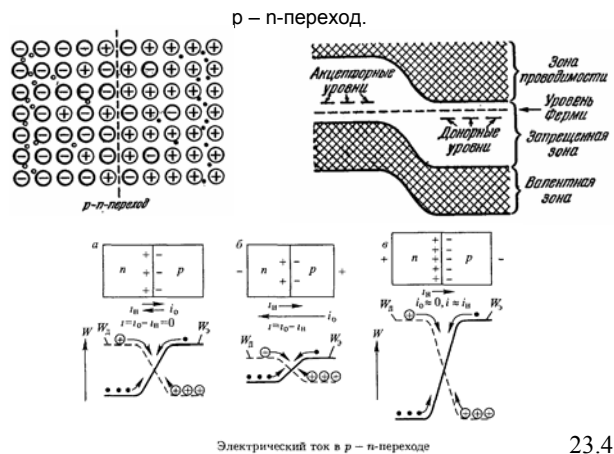
23.2

Примесная проводимость полупроводников.

Полупроводники р- и n-типа.

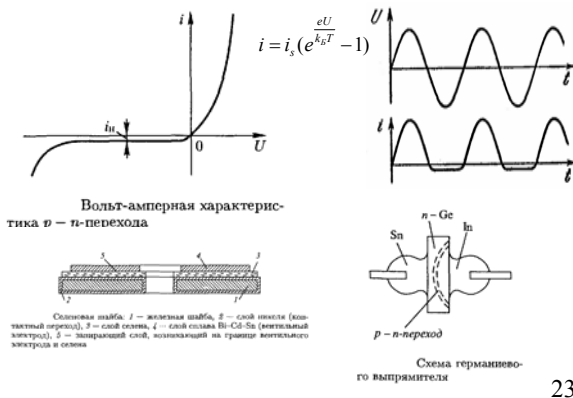


23.3



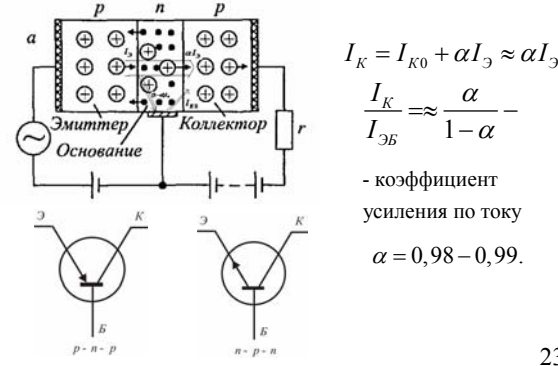
23.4

Применение полупроводников. Полупроводниковый диод.



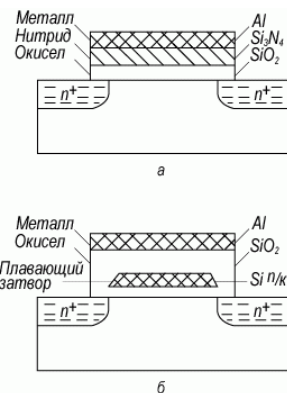
23.5

Применение полупроводников. Биполярные и полевые транзисторы.



23.6

Топология полупроводниковых запоминающих устройств: а) МНОП-транзистор; б) МОП ПТ с плавающим затвором



Зарядка плавающего затвора осуществляется за 0.1мкс, разрядка – более 100 лет при комнатной температуре

23.8

фотодиоды, фоторезисторы.



23.9

Контактные явления. Контактная разность потенциалов. [2,§198]

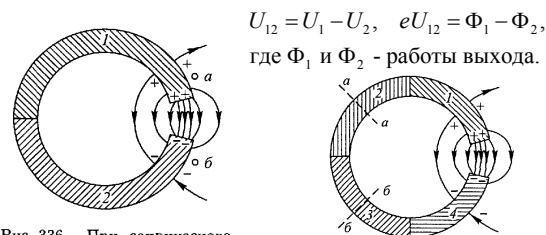


Рис 336 При соприкосновении двух различных металлов во внешнем пространстве появляется электрическое поле, а на поверхности металлов возникают заряды

Рис 337. При соединении нескольких проводников (1, 2, 3, 4) электрическое поле между свободными концами цепи определяется только крайними проводниками (1 и 4)

23.10

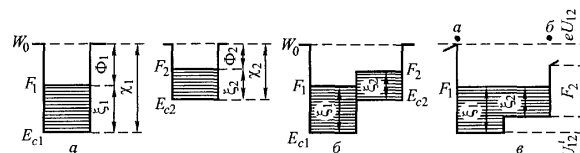


Рис. 339. Энергетическая диаграмма двух металлов: а — контакта нет; б — контакт есть, но нет равновесия; в — равновесие
Здесь W_0 — энергия покоящегося электрона в вакууме, $\chi_1 = W_0 - E_{c1}$ и $\chi_2 = W_0 - E_{c2}$ — глубина потенциальных ям (электронное сродство данного вещества), $F - E_c = \xi$ — химический потенциал электронов.

$$\Phi_1 = W_0 - F_1 = \chi_1 - \xi_1, \quad \Phi_2 = W_0 - F_2 = \chi_2 - \xi_2,$$

$$-eU_1 - (-eU_2) = (\chi_1 - \xi_1) - (\chi_2 - \xi_2) = \Phi_1 - \Phi_2.$$

$$eU_{12} = e(\phi_1 - \phi_2) = \xi_1 - \xi_2.$$

23.11

Термоэлектричество (явление Зеебека 1821г.). Термодвижущая сила. [2,§199].

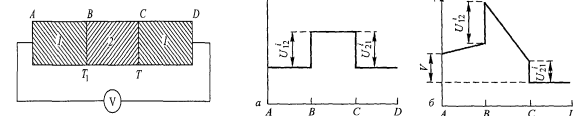


Рис. 341. Распределение потенциала в цепи, изображенной на рис. 340, при $T_1 = T$ (а) и при $T_1 > T$ (б)
 $\Delta \mathcal{E} = \alpha \Delta T$ — термо-ЭДС каждого проводника.
 $\alpha = d\mathcal{E} / dT$ — дифференциальная термо-ЭДС, (коэффициент термо-ЭДС).
 $\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_1 - \alpha_2) dT; \Rightarrow \mathcal{E} = (\alpha_1 - \alpha_2)(T_2 - T_1).$

Металл	$\alpha - \alpha_{Pt}$, мкВ/К	Металл	$\alpha - \alpha_{Pt}$, мкВ/К
Висмут	-65,0	Серебро	+7,10
Константан	-34,4	Медь	+7,40
Никель	-16,4	Железо	+16,0
Палладий	-5,60	Сурьма	+47,0

23.12

Термопары. [2, §202].

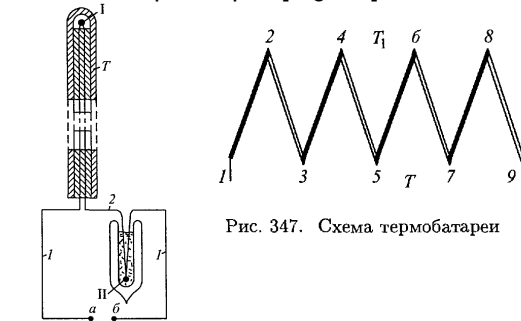


Рис. 346. Схема устройства и включения термопары

Рис. 347. Схема термобатареи

23.13

Эффект Пельтье. [2, §200]

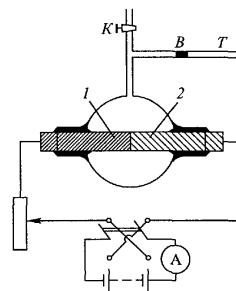


Рис. 342. Наблюдение эффекта Пельтье

$$Q_{\Pi} = \Pi q = \Pi i t.$$

$$P = -\frac{j}{e} (\bar{W}_{\kappa} - e\varphi), \text{ где } N = j/e$$

$$Q_{\Pi} = (P_1 - P_2) \delta t = \frac{1}{e} [(\bar{W}_{\kappa 2} - \bar{W}_{\kappa 1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)] i \delta t,$$

$$\Pi_{12} = \frac{1}{e} [(\bar{W}_{\kappa 2} - \bar{W}_{\kappa 1}) + e(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Для невырожденного электронного газа $\bar{W}_{\kappa 1} = \bar{W}_{\kappa 2} \Rightarrow \Pi_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) = U_{12}^i$.

23.14

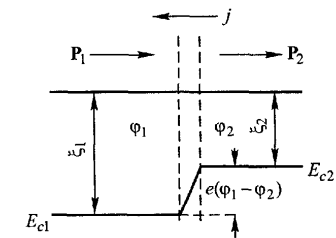


Рис. 343. К определению тепла Пельтье для двух металлов при $T = 0$

Для вырожденного электронного

газа при $T = 0$ $\bar{W}_{\kappa 1} = F - E_{c1} = \xi_1$,

$\bar{W}_{\kappa 2} = F - E_{c2} = \xi_2$. Но $e(\varphi_1 - \varphi_2) = \xi_1 - \xi_2$,

поэтому $\Pi_{12} = e^{-1}[(\xi_2 - \xi_1) + (\xi_1 - \xi_2)] = 0$.

Если $T \neq 0$, то $\Pi_{12} \neq 0$.

23.15

Явление Томсона.

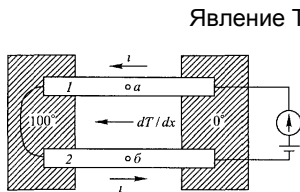


Рис. 344. Наблюдение эффекта Томсона

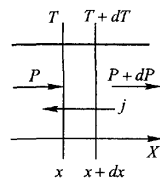


Рис. 345. К объяснению тепла Томсона

$$\frac{Q_T}{\Delta V t} = \sigma \frac{dT}{dx} J - \text{дифф. форма закона, } Q_T = \sigma \Delta T i t - \text{интегр. форма закона,}$$

$$\frac{Q_T}{\Delta V t} = \frac{P(x) - P(x + dx)}{dx} = -\frac{dP(x)}{dx} = \frac{J}{e} \frac{d\bar{W}_{\kappa}}{dx} - J \frac{d\varphi}{dx}.$$

$$\frac{d\bar{W}_{\kappa}}{dx} = \frac{d\bar{W}_{\kappa}}{dT} \frac{dT}{dx}; \Rightarrow \frac{Q_T}{\Delta V t} = \frac{J}{e} \frac{d\bar{W}_{\kappa}}{dT} \frac{dT}{dx} + J E.$$

23.16

Сверхпроводимость. Основные свойства сверхпроводников. Высокотемпературная сверхпроводимость.

Явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Переход вещества в сверхпроводящее состояние в отсутствии внешнего магнитного поля является фазовым переходом 2-го рода, в присутствии поля – 1-го рода. Наибольшие значения критической температуры (до 1986 года) было у соединений ниобия и германия 23,2 К.



Figure 27.12 Resistance versus temperature for a sample of mercury (Hg). The graph follows that of a normal metal above the critical temperature T_c . The resistance drops to zero at T_c , which is 4.2 K for mercury.

Table 27.3

Material	T_c (K)
HgBa ₂ Cu ₂ O ₈	134
Tl-Ba-Cu-O	125
Bi-Sr-Cu-O	105
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92
Nb ₃ Ge	23.2
Nb ₃ Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

23.17

Магнитная индукция внутри сверхпроводника. Эффект Мейсснера. Критическое поле.

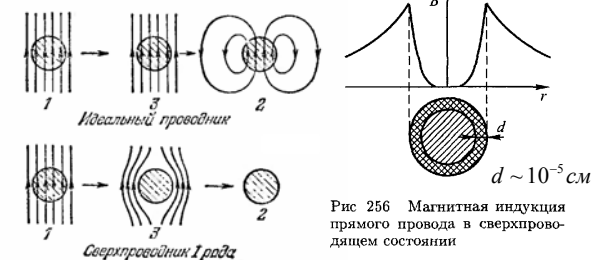
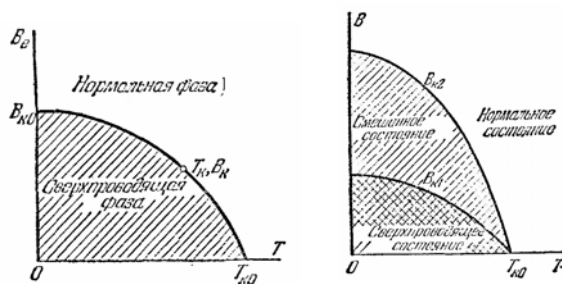


Рис. 256. Магнитная индукция прямого провода в сверхпроводящем состоянии

Укажем для примера, что у олова при 1 К $H_{кр}$ составляет около $2 \cdot 10^4$ А/м. Поэтому для оловянной проволоки диаметром $2a = 3$ мм критическая сила тока при этой температуре равна

$$i_{кр} = 2\pi a H_{кр} = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^4 \approx 180 \text{ А.}$$

23.18



Если фактор формы $\beta \neq 0$, то образец сверхпроводника первого рода переходит в нормальное состояние частями (доменами). Сверхпроводники 1-го рода с положительной поверхностной энергией, 2-го рода - с отрицательной.

23.19